

Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Moment cinétique. Mouvement de rotation. Vecteur position. Produit vectoriel. Structure de la force de la gravitation. Grandeurs vectorielles. Position d'équilibre. Petite variante. Loi de la gravitation universelle. Toutes petites masses. Grandeur de moments cinétiques. Priorité du produit vectoriel. Moment de force. Lois de kepler. Force de la gravitation universelle.



[vers la recherche de séquences vidéo](#)

(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)



[vers la vidéo](#)

Center for Digital Education. Plus de matériel de soutien pédagogique ici :

<https://www.epfl.ch/education/educational-initiatives/cede/educational-technologies-gallery/boocs-en/>

Chapitre 9

Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

EPFL

Dr. Sylvain Bréchet

9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

1 / 39

...

notes

résumé

0m 0s



9.1 Moment cinétique et moment de force

- 9.1.1 Moment cinétique
- 9.1.2 Moment de force
- 9.1.3 Théorème du moment cinétique
- 9.1.4 Mouvement circulaire uniforme

9.2 Loi de la gravitation universelle

- 9.2.1 1^{ère} loi de Kepler
- 9.2.2 2^e loi de Newton
- 9.2.4 Loi de la gravitation universelle
- 9.2.5 Constantes du mouvement
- 9.2.6 Orbites gravitationnelles

9.3 Gravitation classique et relativité générale

- 9.3.1 Prédictions de la relativité générale
- 9.3.2 Cosmologie

Ces sous-titres ont été générés automatiquement Bonjour à toutes et à tous. Aujourd'hui est un grand jour puisqu'on va ensemble déduire la structure de la force de la gravitation universelle. On va le faire de manière analogue à ce que Newton avait lui-même fait avec une petite variante. On va même aller au delà de la loi de la gravitation universelle puisqu'à la fin de ce cours je vous parlerai un tout petit peu de relativité générale. On fera ça par la bande. Je vous rassure tout de suite, il n'y aura pas de grosses équations monstrueuses. Ce sera plutôt une histoire qu'autre chose. Mais c'est souvent ces petites histoires qui sont encore plus intéressantes que l'aspect purement calculatoire. C'est l'aspect conceptuel qui compte. Donc pour pouvoir parler de gravitation, de décrire donc un mouvement de rotation dû à la force de la gravitation universelle, on doit d'abord introduire des grandeurs qui vont permettre de décrire avec succès ce mouvement. Alors je vais faire une petite discrétion, un petit parallèle. Quand on a décrit le mouvement d'un peuple qui se déplaçait sur un disque en rotation, on a vu entre autres qu'il y a une grandeur qui était conservée, on l'avait appelée L . Cette grandeur c'était en fait le moment cinétique. Donc pour pouvoir traiter avec succès de la théorie, de la gravitation universelle, il faudra qu'on dispose de cette information capitale qui est le moment cinétique. Donc on introduira cette grandeur de moments cinétiques. La grandeur qui lui est associée, qui est le moment de force, chaque fois que vous entendez le mot moment, il faut penser à la rotation. D'accord ? Le moment est directement lié à une rotation. Il y a un lien avec la statistique, avec des moments. Il y a une description statistique, on ne va pas le faire ici. D'accord ? Donc on va

notes

résumé

0m 1s



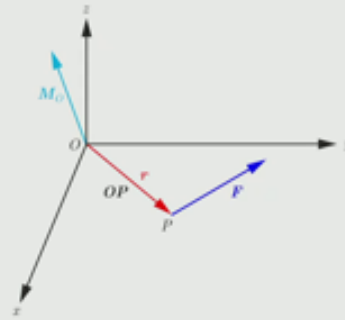
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force $\vec{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



définir ce qu'est un moment cinétique, ce qu'est un moment de force, et puis on verra qu'on a un théorème qui les relie, qui est l'analogue en rotation de la deuxième loi de Newton en translation. Vous pensez certainement que c'est la deuxième loi qui est la plus fondamentale. C'est pas vrai. Le théorème du moment en cinétique est plus fondamentale que la deuxième loi de Newton parce qu'une translation est un cas particulier de rotation, l'inverse n'est pas vrai. D'accord ? On verra ça ensemble un petit peu plus tard dans le cas de secours. A titre d'implication de la conservation du quantité de mouvement, on va même ensemble utiliser le fumigène qui se trouve dans ce cube. On va faire des rôtes fumées, des torres, qui vont se déplacer à travers l'auditoire et on va voir qu'il y a des propriétés absolument étonnantes. D'accord ? Dans la deuxième partie de ce cours, donc, on va introduire la loi de la gravitation universelle. On va ensemble établir la structure de cette loi et je vais même vous parler de l'expérience qui permet de déterminer une des quatre constantes fondamentales de la physique qui est la constante de la gravitation universelle. Ceci se fait grâce à une balance de torsion que vous voyez ici à l'écran. Vous savez en fait si vous regardez dans le caisson, c'est protégé de toute forme de vibration, vous avez deux toutes petites masses reliées par une tige et la tige est fixée sur un fil de torsion métallique verticale et on peut déplacer les grosses masses que vous voyez, vous en voyez une qui est à l'avant, l'autre qui est à l'arrière. On les déplace et on déplace en ces masses, en les approchant des petites masses. On a des forces qui vont être exercées, alors elles sont faibles. Mais quand même, si le fil est très maniable, on arrive à en mettre en

notes

résumé

1m 54s



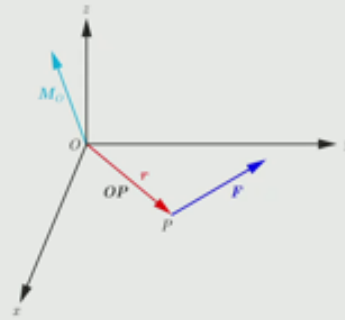
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force $\vec{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



évidence l'action de ces forces de la gravitation universelle sur les petites masses. Il y a donc un moment de force liée à la gravitation universelle qui va agir sur les petites masses, qui va subir un moment de force opposée, un moment de force élastique, d'accord. Et on va avoir une déviation, cette déviation qu'on voit sur la reglette, d'accord. Pourquoi ? Parce qu'il y a un rayon laser qui est clair, un miroir fixé sur la tige. Si la tige bouge, le rayon laser est réfléchi et la déviation mesurée sur la reglette permet alors d'estimer la valeur de la constante de la gravitation universelle. C'est un phénomène qui est très lent. Donc ce que je vais faire, c'est qu'à la main, je vais déplacer les grosses masses et durant le cours, vous allez voir osciller le rayon lumineux, il va partir vers la gauche et il va atteindre une position d'équilibre à gauche. Cette position permet de déterminer G . En exercice, vendredi, vous feriez le calcul et vous verrez comment on peut trouver G , d'accord ? Je vous expliquerai le principe. Alors je vais dévier les masses. Voilà. On a donc lancé le pendule de la torsion. Pour l'instant, vous voyez rien du tout, comme je vous dis, c'est un phénomène lent. On va le voir en vidéo, en accéléré, on va érabouger le petit rayon lumineux. Donc on va se baser sur les trois lois de Kepler qu'on va énoncer proprement, ainsi que sur la deuxième loi de Newton et même sur la troisième loi de Newton. On va donc utiliser tout l'arsenal théorique dont on dispose pour déterminer cette loi de la gravitation universelle. On va ensemble établir des constantes liées au mouvement gravitationnel. Ils vont faire une étude générale du comportement des astres attirés par le soleil en fonction de leur énergie mécanique. On verra que si l'énergie mécanique est négative, on a net

notes

résumé

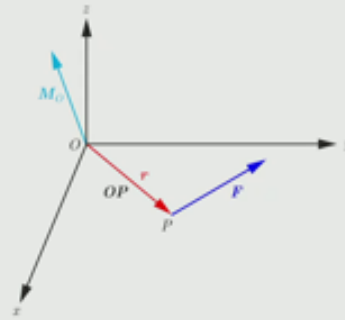
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force F sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs r et F selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



à lier. On peut avoir une trajectoire circulaire ou elliptique. Si l'énergie mécanique est nulle ou positive, on a net à diffusion, d'accord ? Avec une trajectoire qui peut être parabolique ou qui peut être hyperbolique. Donc on tombe sur l'étude générale des coniques liées au mouvement gravitationnel. On verra comment tout ceci peut se décrire de manière assez claire. Et la cerise sur le gâteau sera la troisième partie du cours qui est beaucoup plus ludique, où on va aller au-delà de la gravitation classique. On va voir en quoi la relativité générale change la manière dont on perçoit la loi de la gravitation. Je vais vous parler des prédictions de la relativité générale, des prédictions qui peuvent être assez étonnantes. Par exemple, pour envoyer une fusée sur la lune, vous n'avez pas besoin de la relativité générale. Mais pour voyager de manière sûre et précise à bord de votre voiture, là vous avez besoin de la relativité générale. D'accord ? On va voir pourquoi. Et puis on appliquera la relativité générale à l'ensemble de l'univers pour faire un tout petit peu de cosmologie ensemble et pour étudier une brève histoire du temps. Bien, commençons donc par les grandeurs que sont le moment cinétique et le moment de force. C'est des grandeurs extensives, des grandeurs vectorielles qui caractérisent un mouvement de rotation. Ce sont des grandeurs axiales. Alors pour comprendre le rôle que jouent ces grandeurs, il faut qu'on compare deux types de mouvements que vous connaissez bien maintenant. Le mouvement rectil uniforme et le mouvement circulaire uniforme. Si on a un mouvement rectil uniforme, la grandeur qui est conservée, c'est la quantité de mouvement, d'accord ? La grandeur extensive. Et on verra que si on a un mouvement circulaire uniforme, la grandeur qui est conservée, c'est le moment cinétique évalué par rapport à un point bien précis qui est le centre de la trajectoire. D'accord ? Alors maintenant,

notes

résumé

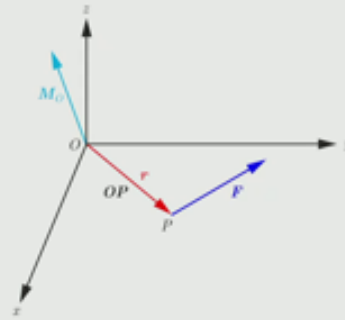
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force $\vec{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



si on n'a pas un mouvement rectil uniforme et qu'il est accéléré, la grandeur qui décrit cette accélération, la cause de cette accélération, c'est une force extérieure. De la même manière, si on n'a pas un mouvement circulaire uniforme et qu'on a un mouvement circulaire uniformément accéléré, la cause de l'accélération angulaire, c'est le moment de force extérieure qui est appliqué. D'accord ? Donc il y a un parallèle absolument direct entre le moment cinétique, la quantité de mouvement et entre le moment de force et la force. D'accord ? La quantité de mouvement et les forces, c'est pour des mouvements généraux, des mouvements de transition, si vous voulez, d'accord, localement, alors que le moment cinétique et le moment de force, c'est vraiment lié à un mouvement de rotation. Quand on va voir comment on va pouvoir les définir ? Alors justement, commençons par le moment cinétique. Imaginons qu'on va y décrire un mouvement de rotation. D'accord ? Alors on a un objet qu'on a simplifié à un point matériel P qui est ici. Comme il est en mouvement, la grandeur extensive dont on va devoir tenir compte, c'est sa quantité de mouvement. Quelqu'un qui est donné ici en bleu. D'accord ? Pour décrire une rotation, il faut savoir comment l'objet bouge, mais aussi par rapport à quoi il bouge. On doit savoir où il est. On a besoin aussi du vecteur position qui est ici. Vous voyez qu'avec ces deux vecteurs, on peut définir un parallélogramme et on a une orientation qui est donnée par la manière dont on choisit les vecteurs. Ok ? Si on avait pris le premier vecteur dans ce sens, le deuxième dans celui-ci, d'accord ? On aurait une rotation dans l'autre sens. Ok ? Donc le sens est important. Si on prend ces deux vecteurs et qu'on veut faire un vecteur avec ces deux vecteurs, qu'est-ce qu'on peut faire ? Un produit vectoriel. Quelle

notes

résumé

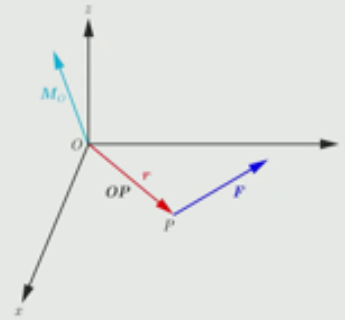
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force $\vec{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



est la priorité du produit vectoriel ? Il est anticommutatif. Le produit vectoriel du vecteur position avec le vecteur quantité de mouvement serait l'opposé du produit vectoriel de la quantité de mouvement avec la position. Ok ? En plus, c'est un vecteur axial. Je vous l'ai dit au chapitre, je crois que c'était la fin du chapitre 4, d'accord ? Ou chapitre 5, que si vous prenez le produit vectoriel de deux vecteurs polaires, d'accord ? Si vous les envoyez sur moins eux-mêmes, enfin si vous changez l'orientation des axes, vous les envoyez sur moins eux-mêmes, moins fois moins ça fait plus, ça donne un vecteur axial. D'accord ? Donc le moment signétique, c'est un vecteur axial qui est défini par produit vectoriel de la position et de la quantité de mouvement. Le moment signétique se définit par rapport à un point bien particulier. Donc là, on va prendre le moment signétique à l'origine, qui est donc le produit vectoriel du vecteur OP qui part de l'origine, qui pointe sur le point matériel, avec la quantité de mouvement. La quantité de mouvement qui est un petit p . Bon. Donc c'est le produit vectoriel de la position avec la quantité de mouvement. Là, on l'a fait par rapport à l'origine, plus tard, on verra qu'il est très utile de pouvoir le faire par rapport à n'importe quel point, spécialement quand on aura un solide indéformable. D'accord ? Mais la logique sera toujours la même. Donc ce vecteur, il est orienté. Comment ? Eh bien, si on fait le produit vectoriel de $\vec{r}$ avec $\vec{p}$, on va aligner l'index de la main droite selon $\vec{r}$, le majeur selon $\vec{p}$ et le pouce qui est orthogonal au plan qui est engendré par $\vec{r}$ et $\vec{p}$; va nous donner l'orientation du moment signétique. D'accord ? Il va toujours être orthogonal à ce plan, d'après la règle de la main droite. Alors si vous préférez quelque chose

notes

résumé

-

(9.2)

James Thomson
1822 – 1892

- 

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.

notes

résumé

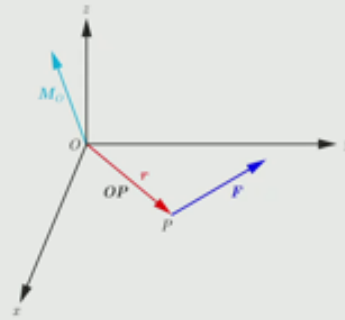
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force $\vec{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



C'est Daniel Bernoulli, qui était un ami de la famille Euler. D'accord ? Voilà. Alors, on a un trop dit de moments signétiques, on aimerait maintenant une grandeur axiale qui joue un rôle analogue à la force pour les rotations. Alors évidemment que cette grandeur axiale sera construite selon la même idée. Si pour construire le moment signétique, on a pris le produit vectoriel de la position avec la quantité de mouvement, maintenant pour construire le moment de force, on va prendre aussi le produit vectoriel de la position avec le vecteur, d'accord, qui va représenter la force, d'accord ? Puisque le moment de force est analogue à la force en rotation. Concrètement, si on veut un moment de force, faudra savoir où est l'objet, d'accord ? Et comment est orientée la force qui est exercée sur l'objet en un point donné. Donc, on prend le produit vectoriel de la position avec la force pour définir le moment de force ici évalué par rapport à l'origine. D'accord ? Donc, c'est le produit vectoriel du vecteur OP avec la force F qui est égale donc $\vec{r} \times \vec{F}$. Quand on s'ouvre une porte, c'est où que vous appuyez sur la poignée ? Pourquoi les poignées ne sont jamais à côté de la charnière mais qu'elles sont toujours du côté opposé ? Parce que justement pour créer une rotation d'apporte, vous voulez que le moment de force soit aussi grand que possible pour engendrer l'accélération angulaire. C'est le moment de force qui dépend de deux choses. Il dépend de la force et de la position du point sur lequel on applique la force, d'accord ? Donc, plus le point va être éloigné, plus le moment de force va être grand. En plus, comme c'est le produit vectoriel de la position avec la force, il faut que la force soit exercée de manière orthogonale. Si j'appuie sur la poignée comme ça, dans le

notes

résumé

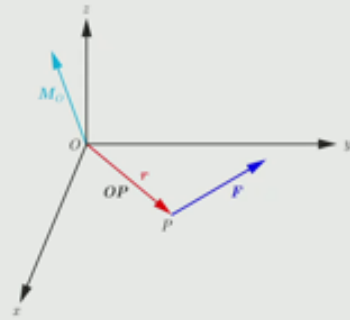
- **Moment de force** : grandeur vectorielle extensive et axiale M_O , définie par rapport à un point O , associée à l'action d'une force $\vec{F}$ sur le mouvement de rotation plan du point matériel P autour de O .

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.2)$$

Le moment de force M_O est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ selon la règle de la main droite.

- **Unité (SI)** : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

Il ne faut pas confondre l'unité du moment de force avec celle de l'énergie car l'énergie est un scalaire et le moment de force un vecteur.



James Thomson
1822 – 1892



sens de la... enfin, dans le plan si vous voulez, de la porte, il ne se passe rien du tout. Évidemment, tout le monde le fait intuitivement. On va se placer orthogonalement à la porte et on appuie sur la poignée comme ceci, d'accord ? Parce que c'est le produit vectoriel qu'il produit de la norme de la force, d'accord ? De la norme, de la position, fois le sinus, de l'angle, d'accord ? Là aussi, pour trouver le moment de force, il faut utiliser la règle de la main droite. On aligne l'index de la main droite selon le vecteur position $\vec{r}$, le majeur sonne à la force $\vec{F}$ et on voit que le pousse nous donne le moment de force. Est-ce que le moment de force est toujours collinaire ou moment siétique ? Non, ça serait trop beau, d'accord ? Ça peut être beaucoup plus compliqué. La force, elle peut être exercée dans n'importe quelle direction, indépendamment du mouvement. Et bien le moment de force peut avoir n'importe quelle orientation, indépendamment du moment siétique, d'accord ? Alors quelle est l'unité d'un moment de force ? On fait l'exercice, on prend l'unité associée à une distance, l'unité associée à une force, on a donc des mètres fois des Newton, d'accord ? On aurait envie de dire

notes

résumé

- Moment cinétique :

$$L_O = OP \times p = r \times p \quad (9.1)$$

- Dérivée temporelle : moment cinétique

$$(9.3)$$

- 2^e loi de Newton :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{p} \quad (2.17)$$

- Dérivée temporelle : moment cinétique

$$(9.4)$$

- Moment de forces extérieures : somme (9.2)

$$(9.5)$$

- Théorème du moment cinétique : évalué à l'origine O

$$(9.6)$$

Le théorème du moment cinétique est l'analogue en rotation de la 2^e loi de Newton en translation.

que c'est des kilogrammes fois des mètres au carré divisé par des secondes au carré et ça ça ressemble à quelque chose qu'on connaît, des joules. Ah pourquoi est-ce qu'on dit que c'est pas des joules ? Parce qu'on travaille dans un espace vectoriel. Si on travaille dans un espace vectoriel, on doit distinguer l'escalier des vecteurs, d'accord ? Donc un moment de force est un vecteur axial, même si au niveau de la dimension les unités qui apparaissent semblent être les mêmes, ceci n'est ici pas des joules. On va le définir comme étant des mètres Newton ou des Newton mètres, d'accord ? Alors évidemment aussi, vous devez calculer une énergie liée au travail d'une force, vous multipliez une force par une distance. Là c'est des joules, là c'est un scalaire, d'accord ? Tandis que cette grandeur là n'est pas un scalaire. On pourrait les traiter avec exactement la même unité si on faisait de la mécanique classique, non pas dans un espace vectoriel mais dans une algèbre. Là, ça fonctionnerait, d'accord ? C'est d'ailleurs ce qu'on devrait faire, mais qu'on enseigne pas ici. Bien malgré moi, je vous l'enseignerai avec plaisir, d'accord ? Mais bon, c'est un choix, c'est un choix méthodologique qui a été fait il y a longtemps et on ne peut pas complètement remettre ces bâtons, mais c'est ce qu'il faudrait faire. La mécanique classique est beaucoup plus claire en prenant une structure d'algèbre, qu'en prenant une structure d'espace vectoriel. Alors cette notion de moments de force a été introduite par William Thompson, par James Thompson, pardon, et James Thompson, c'est le frère de William Thompson. Alors peut-être que vous n'avez jamais entendu parler de William Thompson, mais peut-être que vous avez entendu parler de Lord Kelvin, c'est la même personne, Lord Kelvin est la personne qui a défini l'échelle de température, qui porte son nom, qui est l'échelle de température absolue. Alors maintenant qu'on

notes

résumé

16m 1s



- Moment cinétique :

$$L_O = OP \times p = r \times p \quad (9.1)$$

- Dérivée temporelle : moment cinétique

$$(9.3)$$

- 2^e loi de Newton :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{p} \quad (2.17)$$

- Dérivée temporelle : moment cinétique

$$(9.4)$$

- Moment de forces extérieures : somme (9.2)

$$(9.5)$$

- Théorème du moment cinétique : évalué à l'origine O

$$(9.6)$$

Le théorème du moment cinétique est l'analogue en rotation de la 2^e loi de Newton en translation.

introduit le moment

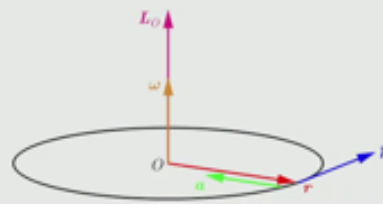
notes

résumé

- Accélération centripète : MCU

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4.92)$$

- Moment de forces extérieures : (9.7)



- Théorème du moment cinétique : évalué en O

(9.8)

- Moment cinétique : évalué en O

(9.9)

- Mouvement circulaire uniforme : axe orthogonal passant par O

(9.10)

siéthique et le moment de force, on va les lier, d'accord ? On va les lier à travers le théorème du moment siéthique. On peut déjà le deviner, ce théorème, il est assez logique quelque part. Comme le moment siéthique joue le même rôle que la quantité de mouvement en rotation, que le moment de force joue le même rôle en rotation que la force, la somme des moments de force va être égale à la dérivée temporelle du moment siéthique. Voilà ce qu'on veut trouver, d'accord ? Alors maintenant on va le trouver. Alors on va se baser sur le moment siéthique qui est ici, et donc on va le dériver par rapport au temps. Faisons-le, calculons la dérivée du moment siéthique évalué par rapport à l'origine. Je vous rappelle, on a vu ça la première semaine, que quand vous avez un produit qui soit arithmétique, qui soit scalaire, qui soit vectoriel, de fonctions qui peuvent être scalaires ou des vecteurs, la dérivée par rapport au temps du produit, c'est la dérivée de la première fonction, produit avec la deuxième, plus la première fonction, produit avec la dérivée de la deuxième. Ici les fonctions sont des fonctions vectorielles, ce sont les vecteurs, positions et quantités de mouvement, d'accord ? Le produit est un produit vectoriel, mais la logique est toujours invariablement la même. Donc on verrive par rapport au temps le vecteur position, on prend le produit vectoriel avec la quantité de mouvement. Et on ajoute à ceci le produit vectoriel de la position avec la dérivée temporelle de la quantité de mouvement. Bon, alors détaillons un tout petit peu le premier terme. La dérivée temporelle de la position, comme vous le savez, c'est la vitesse, la quantité de mouvement, c'est le et il va nous rester le produit vectoriel de la position avec la dérivée temporelle, la quantité de mouvement. Si on multiplie un vecteur comme le vecteur

notes

résumé

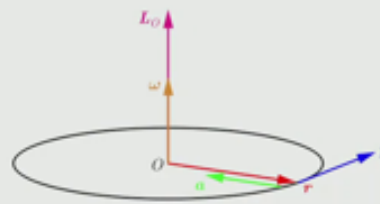
17m 51s



- Accélération centripète : MCU

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4.92)$$

- Moment de forces extérieures : (9.7)



- Théorème du moment cinétique : évalué en O

(9.8)

- Moment cinétique : évalué en O

(9.9)

- Mouvement circulaire uniforme : axe orthogonal passant par O

(9.10)

vitesse par un scalaire qui est la masse, on a un vecteur qui a la même orientation que le vecteur vitesse. Donc si on prend le produit vectoriel du vecteur vitesse avec ce vecteur, les deux vecteurs sont collinaires, ce produit vectoriel est nul. Il reste uniquement le deuxième, qui est le produit vectoriel de la position avec la dérivée temporelle de la quantité de mouvement. Alors maintenant, on peut se baser sur la deuxième loi Newton, qui nous dit que la dérivée temporelle de la quantité de mouvement, c'est la somme des forces extérieures. Et donc, la dérivée temporelle du moment cinétique, qui est le produit vectoriel de la position avec la dérivée temporelle de la quantité de mouvement, puis alors s'écrit comme le produit vectoriel des forces extérieures. On peut bien évidemment la faire coïncider avec le produit vectoriel et avec la position. Parce que si on prend le produit vectoriel de la position avec chacune des forces, c'est forcément la somme du produit vectoriel de la position des forces. Donc ceci, c'est la somme du produit vectoriel de la position avec chacune des forces extérieures. Oui mais, la somme des moments de force extérieure évalués par rapport à l'origine, c'est quoi ? Eh bien, c'est la somme des vecteurs positions évalués par rapport à l'origine du point matériel avec toutes les forces extérieures. D'accord ? Comme c'est un point matériel, elles sont toutes appliquées au même point P. Le vecteur européen, c'est le vecteur position, c'est donc la somme du produit vectoriel, du vecteur position avec les forces extérieures. Et de manière assez miraculeuse, c'est justement le terme qu'on a calculé précédemment. Ce qui veut dire que comme les membres de droite sont égaux, forcément que les membres de gauche le seront aussi. Ce qui nous permet de conclure, avec le théorème du moment cinétique qu'on vient donc de démontrer, la somme des moments de force extérieure

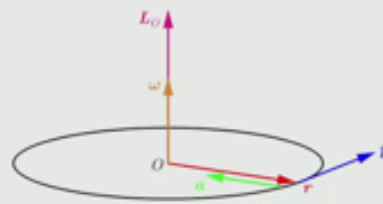
notes

résumé

- Accélération centripète : MCU

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4.92)$$

- Moment de forces extérieures : (9.7)



- Théorème du moment cinétique : évalué en O

(9.8)

- Moment cinétique : évalué en O

(9.9)

- Mouvement circulaire uniforme : axe orthogonal passant par O

(9.10)

évaluées par rapport à l'origine, c'est la dérivée temporelle du moment cinétique évalué par rapport à ce même point. Et ça, c'est un résultat absolument central. On s'est basé au niveau méthodologique, au niveau calculatoire, sur la 2e loi Newton pour parvenir à énoncer le théorème du moment cinétique. Alors vous avez donc l'impression que ce théorème, il est quelque part moins fondamental que la 2e loi Newton. Détrompez-vous. Prenez un mouvement de rotation. Prenez un mouvement de rotation et vous faites tendre maintenant le rayon vers l'infini. Ça donne quoi, localement, une transition ? Une transition est une rotation de rayon de courbure infini, d'accord ? Donc si vous avez localement, si le rayon tend vers l'infini, vous ne voyez plus la courbure, et donc ce qui vous semble être une rotation tend vers une transition. Donc dans la limite d'un rayon de courbure qui tend vers l'infini, un mouvement de rotation se réduit à un mouvement de transition. La rotation est donc plus fondamentale que la transition. D'accord ? Voilà.

notes

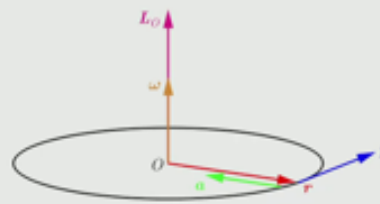
résumé

- Accélération centripète : MCU

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4.92)$$

- Moment de forces extérieures : (9.7)

$$\sum \vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum \vec{r} \times \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{r} \times \Sigma$$



- Théorème du moment cinétique : évalué en O

(9.8)

- Moment cinétique : évalué en O

(9.9)

- Mouvement circulaire uniforme : axe orthogonal passant par O

(9.10)

Dr. Sylvain Bréchet

9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

7 / 39

Alors, appliquons tout ce qu'on vient d'établir au cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme. En plus, on va exploiter les symétries et on va donc calculer les grandeurs axiales par rapport au centre de la trajectoire circulaire. D'accord ? Rappelez-vous au chapitre 4 de secours, on a montré que pour un mouvement circulaire uniforme, d'accord ? La vitesse était le produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire avec la position. Si on dérive ça par rapport au temps, à vitesse angulaire constante, l'accélération est le produit vectoriel de la vitesse angulaire avec la vitesse, qui est elle-même le produit vectoriel de la vitesse angulaire avec la position, ce qui veut dire que l'accélération est le produit vectoriel de omega avec le produit vectoriel de omega avec R. D'accord ? C'est si on peut le récrire en utilisant la formule qu'on établit au premier chapitre, on voit que c'est moins omega carré de foir, mais on peut aussi simplement le faire déjà au niveau géométrique. Si on prend le produit vectoriel de omega avec R, on va se retrouver avec la vitesse, ici le collinaire à la quantité de mouvement. Si on prend ensuite le produit vectoriel de omega avec V, qui est le produit vectoriel de omega carré, on se retrouve avec l'accélération qui est orientée radialement vers l'intérieur, pour la norme et moins omega carré foir. Bon, alors on veut exploiter le théorème du moment enciétique. On va donc calculer la somme des moments de force extérieures évalués par rapport à l'origine. Faisons-le. On a la somme des moments de force extérieures évalués par rapport à l'origine qu'on choisit évidemment au centre de notre trajectoire circulaire, sinon le résultat qu'on va établir ne tiendrait pas. C'est par définition la somme du produit vectoriel des positions avec l'ensemble des forces extérieures. On peut là un nouveau refer commuter la somme et le produit vectoriel. On a le produit vectoriel

notes

résumé

22m 47s

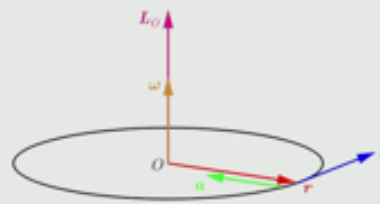


- Accélération centripète : MCU

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (4.92)$$

- Moment de forces extérieures : (9.7)

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_O^{\text{ext}} &= \sum \vec{r} \times \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{r} \times \sum \vec{F}^{\text{ext}} \\ &= \vec{r} \times m \vec{a} = -m\omega^2 \vec{r} \times \vec{r} = 0 \end{aligned}$$



- Théorème du moment cinétique : évalué en O

(9.8)

- Moment cinétique : évalué en O

(9.9)

- Mouvement circulaire uniforme : axe orthogonal passant par O

(9.10)

de la position avec la somme des forces extérieures. On va dans l'autre sens que ce qu'on a fait pour établir le théorème. Ceci, c'est le produit vectoriel de la position avec la somme des forces extérieures qui, pour un point matériel, est le produit de sa masse fois son accélération. Or l'accélération de notre mouvement imposé qui est un mouvement circulaire uniforme est de la forme moins omega carré fois r. La masse c'est un scalaire qu'on a le droit de mettre en évidence. On va faire pareil avec le moins omega carré. On va donc se retrouver en évidence avec un moins m omega carré et puis il va nous rester le produit vectoriel de la position avec elle-même. Évidemment que le produit vectoriel d'un vector avec lui-même nous donne zéro. Ce qui nous démontre que la somme des

notes

résumé

24m 38s





Air freiné par le bord
du trou, à sa sortie,
et par l'air extérieur



Déplacement d'air
global

- En tirant et en relâchant la membrane arrière du cube, on peut créer un vortex de fumée par convection à la sortie du trou circulaire.
- La rotation de la fumée en deux régions opposées du vortex (tore) a lieu en sens opposé. Ainsi, les moments cinétiques L_O et L'_O sont égaux et opposés et se compensent de sorte que le moment cinétique total du vortex soit nul en tout temps.

moments de force extérieures évaluées par rapport à l'origine doit être strictement nul. Ce genre de raisonnement vectoriel en manipulant des relations est très important. Il faut que vous soyez capables d'être en mesure de faire ce genre de raisonnement à l'examen. Je le mentionne. C'est le passage de ce point celui-ci. Ce que j'ai fait c'est que j'ai repris l'accélération qui est ici. Si je le détaille, je vais le faire avec le laser. Si je le détaille, j'ai le produit vectoriel de r avec m qui multiplie l'accélération qui est moins ω carré fois. Maintenant le moins ω carré est le m . Je peux les mettre en évidence. Ce qui va rester c'est ce qui est ici. Moins m ω carré produit vectoriel de la position avec elle-même. Oui ? Alors ici si ça mcu a ça ne marchera pas pour la raison suivante. Quelle est la clé du problème ? C'est l'orientation respective de la position d'accélération. À dire que si vous avez un MCU vous savez que l'accélération est purement ce transcend-tripète c'est-à-dire purement radiale. Si vous avez un MCU à vous alors une composante orthogonal et là ça ne marchera plus. En plus des raisonnements qu'on vient de faire ne marchent que par rapport à l'origine. Si vous prenez un point qui est ici que vous appliquez le même raisonnement ça ne marchera plus. Parce que l'accélération sera plus forcément radiale. Elle est radiale par rapport à l'origine et sera par rapport à n'importe quel point. Mais c'est déjà en soi un superbe résultat. Puisque oui ? Non non mais allez-y. C'était une question par rapport à la notation. Oui. La somme de la position pour les forces extérieures des parenthèses elles sont autour de la position ? Ici oui alors ici il y a des parenthèses ici si vous voulez. D'accord. Et là vous avez des parenthèses là. D'où le placement de la somme.

notes

résumé

25m 23s





- En tirant et en relâchant la membrane arrière du cube, on peut créer un vortex de fumée par convection à la sortie du trou circulaire.
- La rotation de la fumée en deux régions opposées du vortex (tore) a lieu en sens opposé. Ainsi, les moments cinétiques L_O et L'_O sont égaux et opposés et se compensent de sorte que le moment cinétique total du vortex soit nul en tout temps.

Mais si vous écrivez ça explicitement. La somme d'un vecteur A . Donc vous prenez produit vectoriel avec une somme de vecteur. Vous avez un vecteur R dans le produit vectoriel avec une somme de vecteur. D'accord. Vous pouvez le décomposer par distributivité. Vous avez un produit vectoriel de R avec chacun de ces vecteurs. Ce qui revient à dire que c'est la somme du produit vectoriel du vecteur R avec les vecteurs. D'accord. Donc si vous le faites en prenant une somme avec deux éléments vous allez tout de suite voir que ça marche bien. Ok. Et évidemment ça marche pour elle aussi. Donc maintenant si on revient au théorème du moment siéthique. La somme des moments de force extérieure évalué par rapport à l'origine qui est la dérivé temporelle du moment siéthique. D'accord. Cette somme est nulle. Qu'est-ce que ça dit sur le moment siéthique ? Si la dérivé temporelle du moment siéthique est nulle, le vecteur moment siéthique il est constant en norme et en orientation. D'accord. Donc L_O , c'est ici un vecteur constant. Alors quelle va être l'orientation de ce vecteur ? On peut tout de suite le voir. Comment ? Eh bien si on prend le produit vectoriel de R avec P au niveau graphique, on aligne, ou le géométrique, on aligne l'index de la main droite selon R , le majeur selon P . Ces deux vecteurs se trouvent dans le plan de rotation. Le moment siéthique est forcément orthogonal au plan de rotation. Il est sur l'axe de rotation. Qui plus est ? Pour le type de mouvement qu'on a considéré ici, où on a un mouvement de rotation qui se fait dans le sens trigonométrique, il est orienté vers l'eau. Alors vous le voyez tout de suite parce que avec l'arrêt du tir bouchon, fait tourner la paume dans la main droite dans le sens trigonométrique, le poussé est orienté vers l'eau. Donc maintenant si

notes

résumé

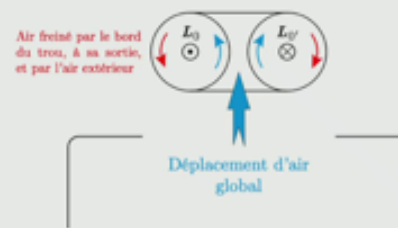


- En tirant et en relâchant la membrane arrière du cube, on peut créer un vortex de fumée par convection à la sortie du trou circulaire.
- La rotation de la fumée en deux régions opposées du vortex (tore) a lieu en sens opposé. Ainsi, les moments cinétiques L_O et L'_O sont égaux et opposés et se compensent de sorte que le moment cinétique total du vortex soit nul en tout temps.

le point matériel tourné en sens opposé, le moment siéthique serait orienté vers le bas. Dans l'un comme dans l'autre cas, le moment siéthique est sur l'axe de rotation, orthogonal au plan de rotation. D'accord. Bon. Si on prend la translation, qu'est ce qu'on sait sur la quantité de mouvement ? La quantité de mouvement qui est la grandeur extensive est toujours liée à la grandeur intensive qui est la vitesse à travers un paramètre qui est la masse d'accord P et Mv . Ils sont collinaires. Ici, Ω est orienté comment ? Il est orienté verticalement vers l'eau, comme l'est aussi l'eau. Donc on a une relation de proportionnalité entre le moment siéthique et la grandeur extensive liée au mouvement de rotation et la vitesse angulaire qui est la grandeur intensive. Le facteur de proportionnalité, c'est pas la masse. C'est une grandeur qui en rotation joue le même rôle que la masse. Cette grandeur, c'est quoi ? C'est le moment d'inertie. D'accord. On n'en parlera plus en détail plus tard dans ces cours. Si vous avez un point matériel, vous avez une symétrie de rotation dans les trois directions de l'espace autour d'un point et donc le moment sénétique sera toujours collinaire au vecteur vitesse angulaire. Si je prends cette bouteille d'avion que je la fais tourner dans n'importe quel sens, ça ne sera plus vrai. C'est ce qui fait la difficulté de l'étude du solide indéformable. C'est que dans le cas général, le moment sénétique, est le résultat d'une application linéaire qu'on appelle le tenseur d'inertie qui envoie donc le vecteur vitesse angulaire sur le moment sénétique. Mais n'anticipez pas, ceci viendra en ton vue. Donc pour notre mouvement circulaire uniforme, Ω est ici une constante. En or, mais en orientation, elle est une constante. Ce qui veut évidemment dire que le moment d'inertie I_O est une constante et qui plus est, comme les deux vecteurs sont orientés dans

notes

résumé



- En tirant et en relâchant la membrane arrière du cube, on peut créer un vortex de fumée par convection à la sortie du trou circulaire.
- La rotation de la fumée en deux régions opposées du vortex (tore) a lieu en sens opposé. Ainsi, les moments cinétiques L_O et L'_O sont égaux et opposés et se compensent de sorte que le moment cinétique total du vortex soit nul en tout temps.

le même sens, cette constante est positive. Alors je vous propose qu'on joue un petit peu avec le moment cinétique maintenant. On va faire une petite expérience, on va faire des rondes fumées ensemble. Pourquoi est-ce qu'on va faire des rondes fumées ? Parce que si vous avez un rond de fumée, ça tourne, mais en même temps ça ne tourne pas, c'est paradoxal. Globalement ça ne tourne pas, mais localement ça tourne. Je vous explique. Vous avez ici une boîte que vous voyez sur votre gauche. Vous avez tout à gauche une membrane qui est ici avec une petite tirette en bois sur laquelle on peut tirer, on arme le dispositif, on remplit le cube de fumée grâce à un fumigène,

notes

résumé

9.2 Loi de la gravitation universelle9.2.1 1^{ère} loi de Kepler9.2.2 2^e loi de Newton

9.2.4 Loi de la gravitation universelle

9.2.5 Constantes du mouvement

9.2.6 Orbites gravitationnelles

d'accord ? Et ensuite on laisse partir la membrane, donc la membrane vient percuter l'air chargé en fumée et donc l'air se déplace linéairement. Il n'y a rien qui tourne, d'accord ? Si vous regardez ce qui se passe dans un plan coupe, un plan coupe qui passe par le centre ici de votre, de votre, du cube, d'accord ? Vous avez à l'opposé de la membrane une ouverture circulaire, vous voyez ici le rayon maximal au centre, que va-t-il se passer ? L'air se déplace comme ceci. Seulement il y a des embouteillages qui vont se créer sur les bords. Ça, ça va initier un mouvement de convection, un mouvement de rotation, d'accord ? Qui est symétrique par rapport à l'axe de symétrie de l'ouverture circulaire. Donc l'air va se mettre, l'air chargé en fumée va se mettre à tourner à droite dans le sens des aiguilles montres à gauche dans le sens trigonométrique. Alors prenons un petit plan coupe horizontal, on prend un petit élément d'air chargé en fumée, d'accord ? Qui se met à tourner, il a une toute petite masse, il aura donc un moment symétrique. Alors comment est orienté le moment symétrique ? Prenons la situation à gauche d'abord. Le petit élément tourne comme ceci dans le sens trigonométrique, d'accord ? Donc si vous faites tourner la paume de la main droite dans le sens trigonométrique, le moment siéthique est orienté vers l'eau. À droite c'est exactement le contraire. Il tourne dans le sens des aiguilles montres, le moment siéthique est orienté vers le bas. Donc il faut imaginer qu'on a pris un film mince et que les moments siéthiques se compensent à gauche et à droite. Alors vous allez me dire oui ça marche horizontalement mais si on avait pris un autre plan, prenons un plan vertical, ça va être exactement la même idée. On peut prendre n'importe quel plan, on peut incliné le

notes

résumé

32m 13s



9.2 Loi de la gravitation universelle9.2.1 1^{ère} loi de Kepler9.2.2 2^e loi de Newton

9.2.4 Loi de la gravitation universelle

9.2.5 Constantes du mouvement

9.2.6 Orbites gravitationnelles

plan qui était horizontal, de n'importe quel angle et tourner autour de la xosymétrie, on aura chaque fois un moment siéthique dans un sens compensé par un moment siéthique dans l'autre. Ce qui veut dire que globalement le moment siéthique est nul. Il était initialement, il doit le rester et donc il reste globalement nul. D'accord ? Donc cette structure a une certaine stabilité. On pourrait avoir un moment siéthique du vortex qui est pas nul si on arrivait à lancer un vortex en lui donnant un mouvement de rotation. Donc si vous arrivez à faire tourner cette vortex qui au lieu de se déplacer en ligne droite, ça met à tourner comme ça. Là vous avez un moment siéthique non nul. Ou si vous générez un vortex, puis ensuite vous arrivez à faire tourner le vortex sur lui-même. C'est comme si vous avez une chambre à air qui tourne sur elle-même. Là vous auriez un moment siéthique non nul. C'est assez difficile à réussir dans la pratique. Bon, alors on va faire l'expérience, on va lancer des ronds de fumée. Il y aura un petit peu de fumée, je suis navré pour le désagrément mais c'est pour la physique, ça vaut la peine. Donc évidemment qu'on va éteindre la lumière. Donc je vais vous plonger dans le noir, attention à vos valeurs. Voilà. Je vais faire un mute de l'écran dans quelques instants. Et puis on va allumer la lumière ici. oui, chercher le bouton, le voilà. On va y aller bien franchement. Voilà, il y en a bien, il y en a assez, ok. Alors maintenant, j'avais armé le dispositif. C'est joli à voir. Alors maintenant, attention, je lance un premier vortex lentement. Et le deuxième le rattrape. Vous avez vu, si je fais ça, non, des fois, attendez, j'y vais lentement pour le premier, hop. Voilà, là, ils se sont cassés, ou à peu près. Pourquoi des

notes

résumé

9.2 Loi de la gravitation universelle9.2.1 1^{ère} loi de Kepler9.2.2 2^e loi de Newton

9.2.4 Loi de la gravitation universelle

9.2.5 Constantes du mouvement

9.2.6 Orbites gravitationnelles

vortex se cassent ? Il y a une explication topologique qui est basée là derrière. Je vais vous la donner dans quelques instants. Mais j'ai d'abord une petite question. Y a-t-il un fumeur ou une fumeuse dans la salle quelqu'un qui a un briquet ? Venez me rejoindre. Il n'y a pas de danger, il n'y a rien qui va exploser, c'est pas une fumée qui peut facilement exploser. Donc il n'y a aucun souci. Il n'y a personne avec un briquet ? Alors, venez me rejoindre. Voilà, c'est bon. Ah, regardez au passage. C'est magnifique, vous voyez, grâce à la fumée, on arrive à voir le rayon laser de l'appareil de Cavendish, la balance de torsion, qui permet de mesurer la constante G . Bon, alors, je vais vous demander de vous mettre à peu près sur le trajet du... voilà. Décalez-vous un tout petit peu plus à droite. Oui, voilà. Et puis vous allumez votre briquet et peut-être mettez-vous de l'autre côté, là où je suis, voilà. Comme ça tout le monde peut voir la flamme. Et la flamme va être éteinte par le souffle du vortex. Vous êtes prêts ? Alors, vous pouvez l'allumer. Elle est un peu descendue, descendez un peu votre main. Presque, presque, on va la refaire. Magnifique, merci beaucoup. Alors, hop. Je vais vous réveiller, attention. Pourquoi est-ce que dans cet expérience, avec les rondes fumées, d'accord, quand on envoie correctement un premier rond qu'il rentre en collision avec l'autre, il peut veclater ? Je vous ai dit, une explication topologique, l'explication la suivante. Si localement, dû à la collision, le moment signétique devient nul, comme il doit globalement être nul et le rester, automatiquement, que la structure devient instable, et donc, la rotation locale du tors se brille, et donc, la rotation locale, la rotation locale du tors se brise, et le tors éclate. D'accord ? Donc, c'est quelque chose d'assez joli. Ce

notes**résumé**

9.2 Loi de la gravitation universelle9.2.1 1^{ère} loi de Kepler9.2.2 2^e loi de Newton

9.2.4 Loi de la gravitation universelle

9.2.5 Constantes du mouvement

9.2.6 Orbites gravitationnelles

genre d'expérience de manière subtile se font en ce moment même en matière condensée, où la notion de protection topologique est devenue très importante et très intéressante. D'accord ? Ça, c'est une illustration de ce style de notion. Voilà.

notes

résumé

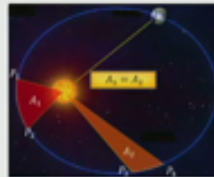
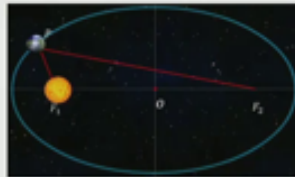
- **Lois de Kepler** : mécanique céleste

- ❶ **Loi des orbites** : l'orbite des planètes est une ellipse dont le soleil est le foyer.
- ❷ **Loi des aires** : l'aire balayée par le vecteur position, centré sur le soleil, par unité de temps est constante.
- ❸ **Loi des périodes** : le rapport de la période orbitale au carré sur le demi-grand axe de l'ellipse au cube est constant.

Tycho Brahe
1546 – 1601



Johannes Kepler
1571 – 1630



Passons maintenant à la loi de la gravitation universelle. Je vous propose de remonter un petit peu les stores obscur 600. Et puis au passage, on va éteindre le projecteur. Pour établir, donc, la loi de la gravitation universelle, on va d'abord énoncer proprement les lois de Kepler, et voir que, à l'époque, c'était pas si simple pour Kepler d'obtenir ces lois. Et on va ensuite se baser sur ces lois, et progressivement découvrir la structure cachée de la force de la gravitation universelle.

notes

résumé

39m 31s





l'ellipse ? Non, il se trouve à l'un des foyers de l'ellipse. Alors, honnêtement, si vous regardez une ellipse comme celle que vous voyez ici, vous imaginez que vous avez une série de points, jusqu'à l'écureuil, on essaye de faire le travail de Kepler, un enfant de quatre ans pourrait le faire. D'accord ? On relie des points, on voit qu'on a une ellipse. Ça paraît simple. Pourquoi c'est si génial ? Parce que la réalité est le plus compliquée que ça. Pour le voir,

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

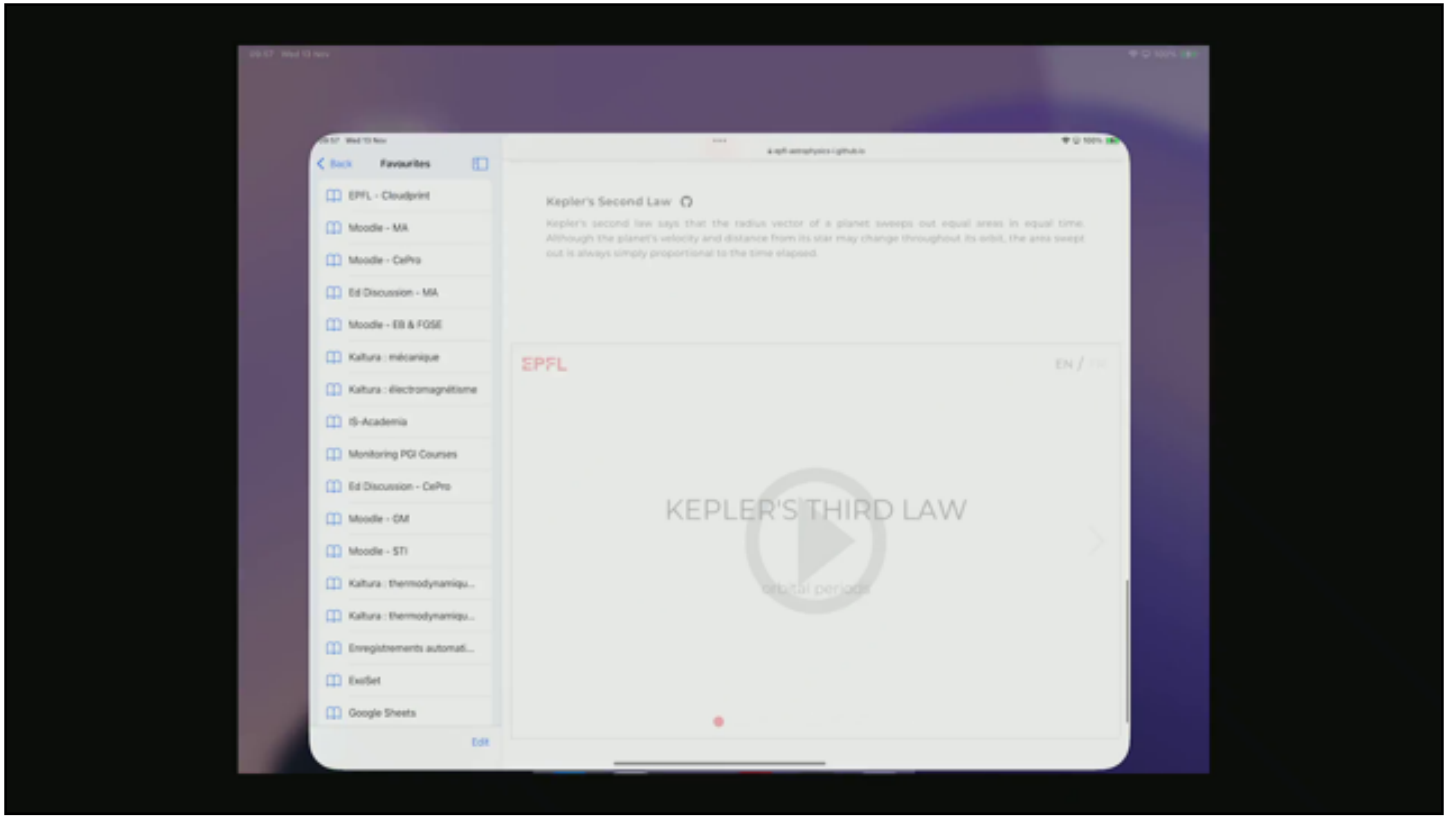
résumé

.....

.....

.....

.....



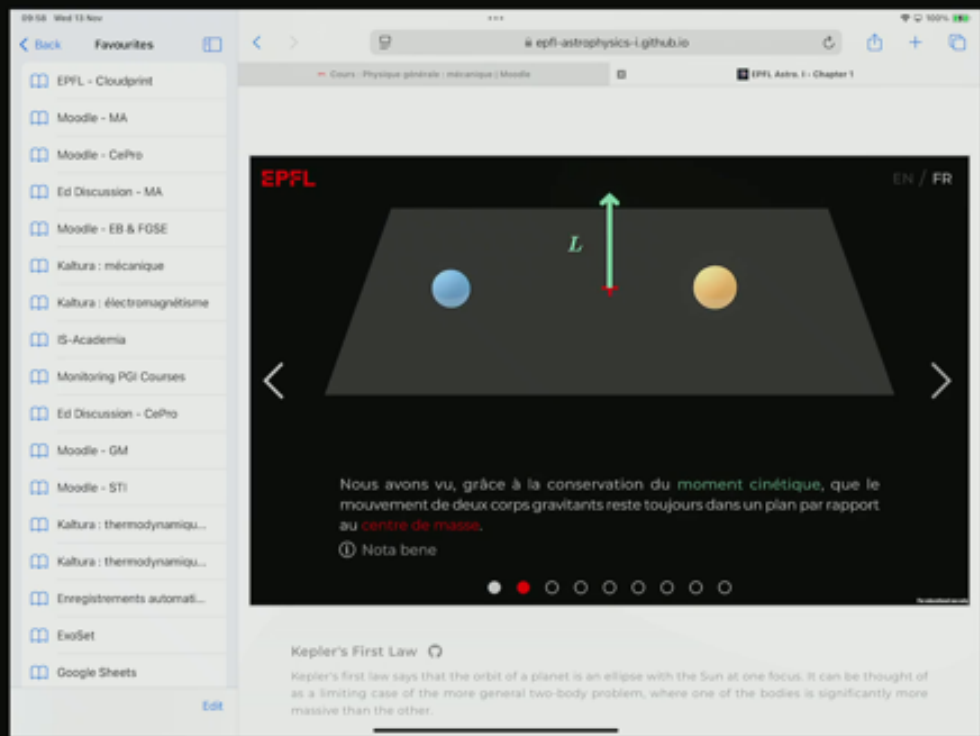
on va faire un petit détour

notes

résumé

42m 49s





et regarder une des apps qui a été développée par Austin. Donc, voilà, prenez celle, donc sur la première loi de Kepler qui est ici. Hop. On essaye un problème à deux corps.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

42m 50s



.....

.....

.....

.....

.....

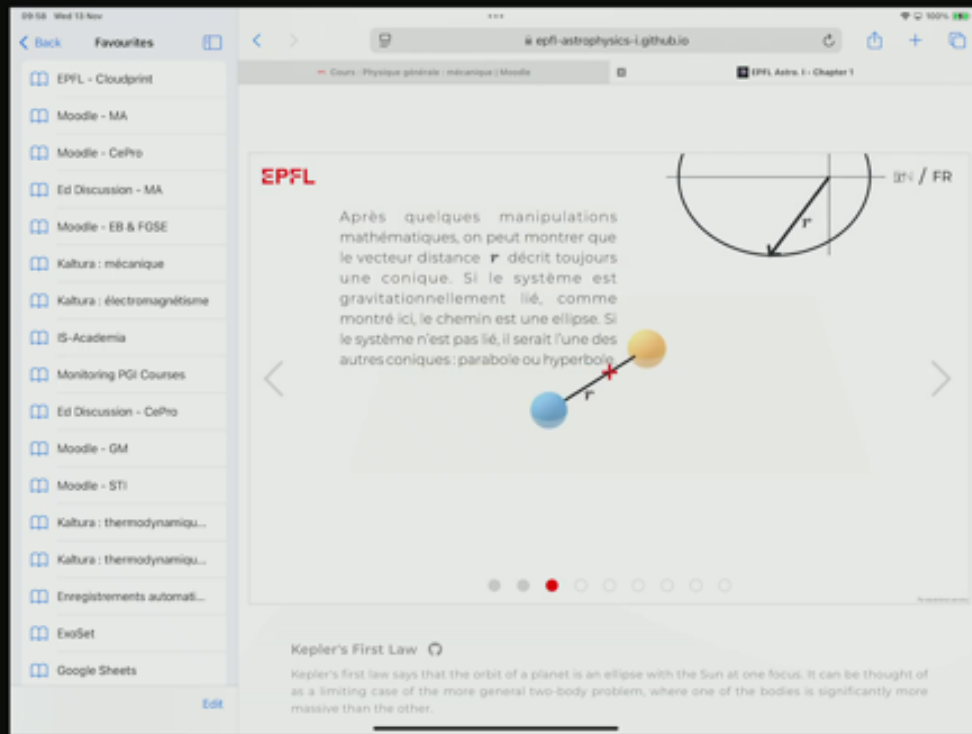
.....

.....

.....

.....

.....



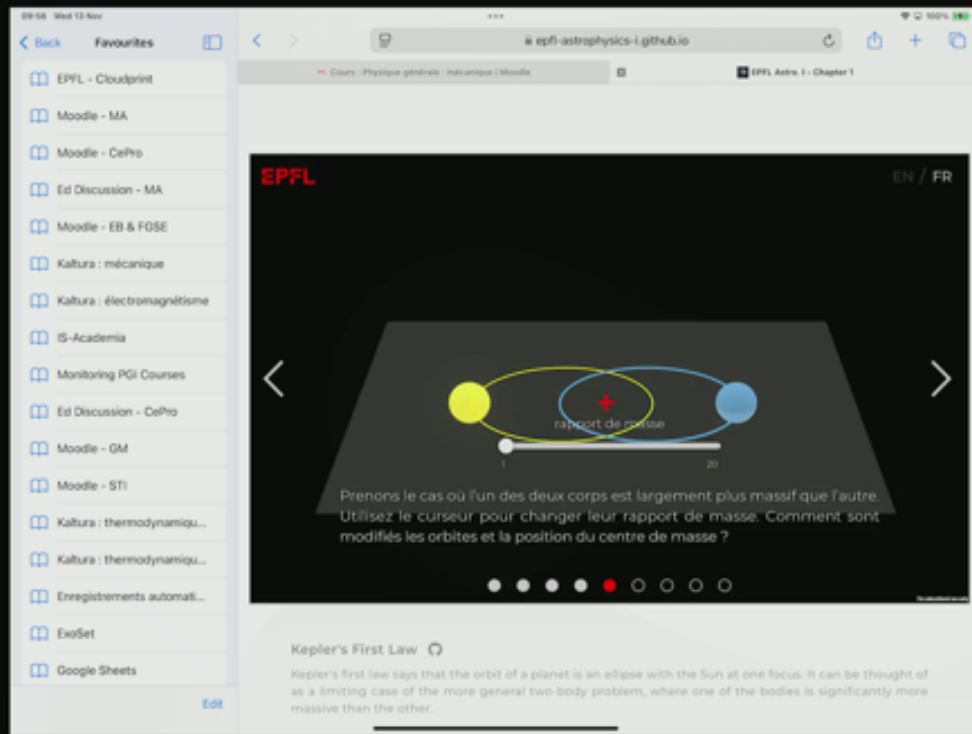
Alors évidemment, dans la pratique, le Soleil est beaucoup plus et beaucoup plus lourd que la Terre. Là, on a deux corps qui ont des masses comparables. Ce qu'on voit dans la dynamique générale de ce système à deux corps, c'est que le moment signatique est constant. D'accord ? Comme pour un mouvement circulaire et uniforme. Alors ensuite, on peut

notes

résumé

43m 2s





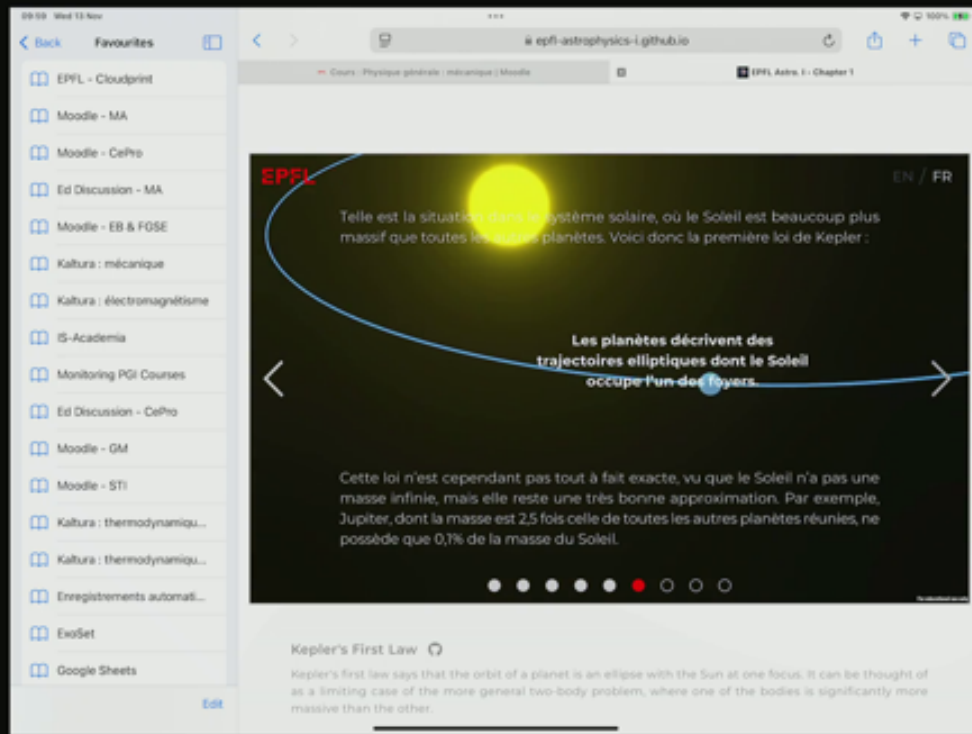
décrire ce qui se passe par rapport au centre de masse, prendre les vecteurs positions relatives et on voit qu'on a deux trajectoires elliptiques. D'accord ? Ça, c'est si on a deux corps de masse comparables, M_2 est légèrement plus grand qu' M_1 . Bon. Alors justement,

notes

résumé

43m 20s





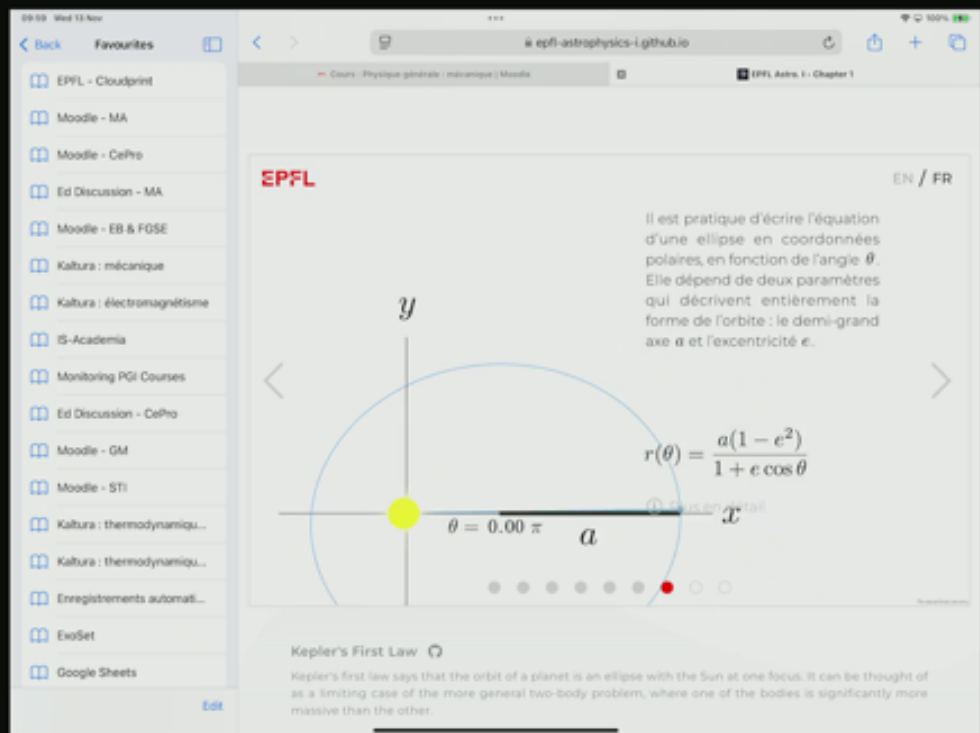
changeons un petit peu le rapport des masses. D'accord ? Ici, vous avez un rapport de masse qui est de 1. Donc vous avez des trajectoires elliptiques, d'accord, qui sont quasiment identiques, juste décalées, par rapport au centre de masse. Alors, maintenant, regardez ce qui se passe lorsqu'on crée une dissymétrie sur le rapport des masses. Vous voyez là, on a une dissymétrie d'un rapport de 10. Là, on a une dissymétrie d'un rapport de 20. Prenez le soleil, vous prenez la Terre. Le soleil, il est un million de fois plus lourd que la Terre. C'est une dissymétrie d'un facteur un million. Inutile de dire que l'orbite elliptique du soleil, elle est beaucoup, beaucoup plus petite que l'orbite elliptique. De la Terre, en réalité, elle est tellement petite qu'elle est contenue à l'intérieur même du soleil. On peut donc résomber à même moment, conclure, que le soleil est à peu près fixe et étudier le mouvement elliptique, d'accord, de la Terre ou d'une autre planète autour du soleil. Et c'est ce qui est fait dans la pratique.

notes

résumé

43m 36s





Alors, maintenant, les ellipses que vous voyez ici, toutes celles qu'on a vues, sont des ellipses qui ont une excentricité qui est très grande. L'excentricité, c'est quoi ? C'est la distance qui sépare les foyers d'une ellipse divisé par le grand axe. Prenons une illustration pour voir de quoi on peut parler.

notes

résumé

44m 34s



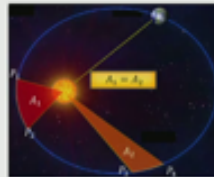
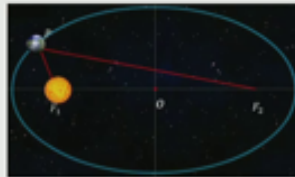
- **Lois de Kepler : mécanique céleste**

- ❶ **Loi des orbites** : l'orbite des planètes est une ellipse dont le soleil est le foyer.
- ❷ **Loi des aires** : l'aire balayée par le vecteur position, centré sur le soleil, par unité de temps est constante.
- ❸ **Loi des périodes** : le rapport de la période orbitale au carré sur le demi-grand axe de l'ellipse au cube est constant.

Tycho Brahe
1546 – 1601



Johannes Kepler
1571 – 1630



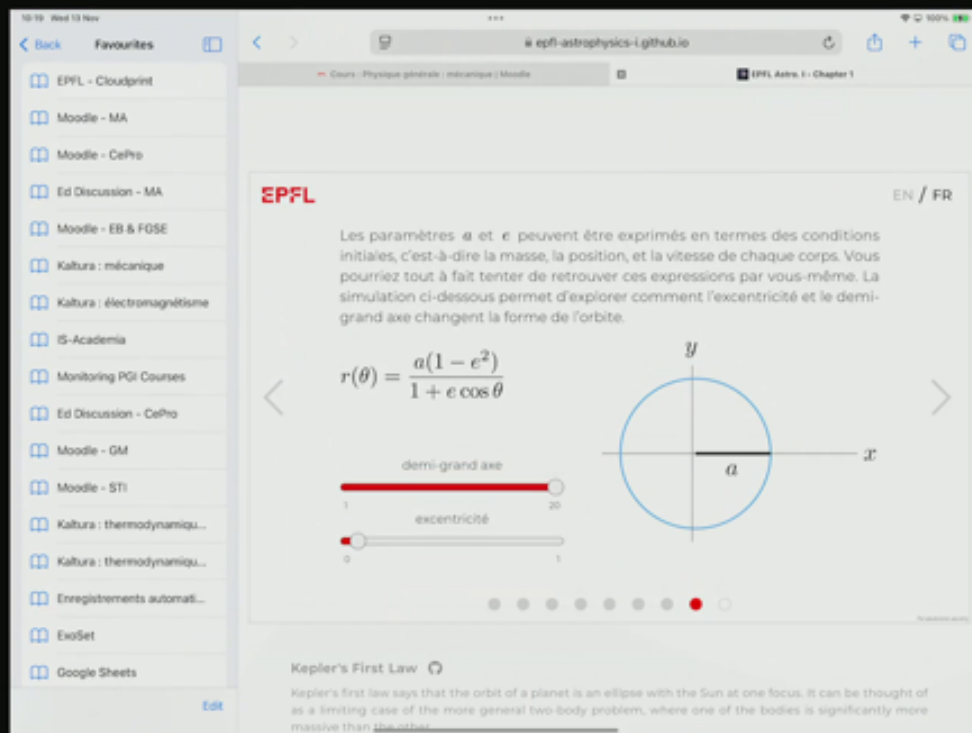
Ça, c'est le genre d'ellipse dont on est en train de parler, d'accord ? Une telle ellipse a une excentricité qui apparaît grâce au curseur qui est en bas. Vous voyez qu'elle est à peu près de 3 quarts, d'accord ? Les excentricités des orbites planétaires, elles ne sont pas de 75 %. Non, elles sont beaucoup, beaucoup plus petites. Elles varient entre 1 et 5 %. D'accord ? Alors, maintenant, on va regarder une telle excentricité. Là, voilà. Bonne chance, si vous avez là des points qui se trouvent sur cette trajectoire pour dire que c'est une ellipse. C'est elle est tellement proche d'un cercle, d'accord ? Il faut avoir un vraiment œil entraîné, de géomètre, et encore pour pouvoir faire la distinction entre un cercle et une ellipse à l'œil nu. Et ça, c'est le genre de données expérimentales dont disposait Kepler. Alors, honnêtement, à la place de Kepler, qu'est-ce qu'on aurait dit ? Si moi, j'avais été à sa place, probablement que j'aurais pensé que mon maître Tico Braé faisait un excellent travail, il avait une petite lunette alimentaire, et donc, il a fait quelques erreurs de mesure. Ce qu'il a pris pour une ellipse est en fait un cercle déformé, dû à ses erreurs de mesure, et donc, on a raison de penser que le mouvement se fait selon un cercle, et la science serait arrêtée là. Non, Kepler, il était étu, Kepler, il était persévérant, Kepler, il avait une sorte de confiance aveugle dans la précision de son maître Tico Braé. Il a eu raison de le faire, puisque, effectivement, c'est bien une trajectoire elliptique. D'accord ? Donc, ce qu'on pensait être naïf et évident

notes

résumé

44m 51s





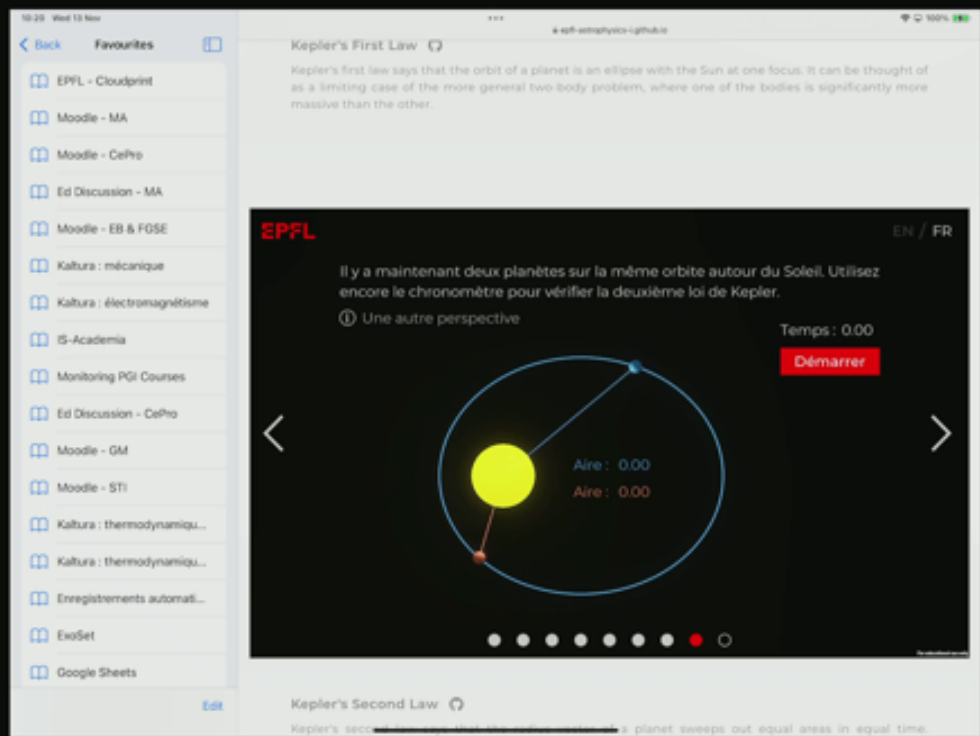
pour un enfant de 4 ans, l'est beaucoup moins quand on regarde les données réelles. D'accord ? Ça, c'est la première loi à la loi des orbites. On parlera après la pause des deux autres lois, la loi des aires, ainsi que la loi des périodes. Voilà, après la loi des orbites, voici la deuxième loi de Kepler, la loi des aires. Alors, qu'est-ce qui la firme, la loi des aires ? Pour le comprendre, il faut imaginer que le plan du système solaire c'est un pare-brise de voiture. Et puis, vous placez le point d'attache de l'essuie-glace sur le soleil, ici. Et le rayon vecteur, le vecteur position de votre planète, la Terre par exemple, par rapport au soleil, c'est donc un essuie-glace télescopique dont l'extrémité suit le déplacement de la planète dans son mouvement. D'accord ? Alors, l'air qui est balayé par l'essuie-glace télescopique au cours du temps, doit être la même par unité de temps donné. C'est ça qu'affirme la loi des aires. C'est-à-dire que si on prend la dérivée temporelle de l'air balayé, cette dérivée temporelle de l'air balayé, c'est ce qu'on appelle la vitesse aérolère, et cette vitesse aérolère est une constante. D'accord ? Ça, c'est ce qu'a affirmé Kepler. Bon, alors ça donne quoi concrètement ? Bon, apprenons un exemple.

notes

résumé

46m 20s





On va prendre la deuxième loi, la voici. Hop. On va se placer ici, voilà. Et donc on voit notre planète à deux moments donné dans sa trajectoire autour du soleil. D'accord ? On a un certain moment donné, qui est par exemple l'image que voyait en brun, d'accord ? Et puis l'été est également visible plutôt dans son mouvement périodique

notes

résumé

47m 52s



- **Lois de Kepler : mécanique céleste**

① **Loi des orbites** : l'orbite des planètes est une ellipse dont le soleil est le foyer.

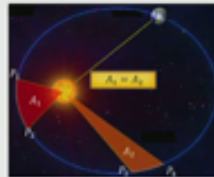
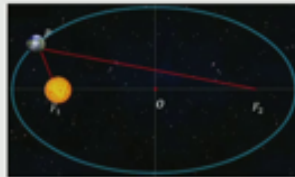
② **Loi des aires** : l'aire balayée par le vecteur position, centré sur le soleil, par unité de temps est constante.

③ **Loi des périodes** : le rapport de la période orbitale au carré sur le demi-grand axe de l'ellipse au cube est constant.

Tycho Brahe
1546 – 1601



Johannes Kepler
1571 – 1630



autour du soleil en bleu. Donc maintenant, on va regarder, pour unité de temps donné, les aires qui sont balayées. Vous allez les voir apparaître numériquement, à côté d'air, d'accord ? Puis vous allez voir l'air achuré au cours du temps. Regardez. On a commencé le chronomètre, on l'arrête. Les valeurs sont identiques. Qu'est-ce que vous avez constaté ? Si vous regardez le mouvement de la planète lorsqu'elle est proche du soleil, elle se déplace plus vite. Regardez. Quand ce qui est plus éloigné, elle se déplace moins vite. Pourquoi ? Pour que l'air achuré par unité de temps soit la même, d'accord ? Donc la vitesse angulaire, elle n'est pas constante. Le rayon, il n'est pas constant. C'est l'air achuré par unité de temps qui est constante. Dans le cas particulier où l'éclipse devient un cercle, à ce moment-là le rayon est constant, et donc la vitesse angulaire devient constante. C'est un mouvement circulaire uniforme, mais dans le cas général, ce n'est pas le cas. Bon, alors, on peut franchement se demander

notes

résumé

48m 25s



- Mouvement plan de la terre : coordonnées polaires

- Vecteur position :

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} \quad (5.5)$$

- Vecteur vitesse :

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (5.8)$$

- Moment cinétique : évalué en O

$$(9.11)$$

Le moment cinétique L_O est orthogonal au plan du mouvement.

- Moment de force gravitationnelle :

$$(9.12)$$

comment, avec des points qui sont disposés sur une trajectoire qui est si voisine d'un cercle, le dénommé Joannès Kepler a eu l'inspiration de Jenny de se dire que l'air balayé par unité de temps devait être une constante. Pour être honnête avec vous, pendant des années, je me suis posé cette question, je n'avais pas de réponse. Et j'ai dû conclure que probablement, ce qu'il a fait, c'est regarder ce qui se passe pour une trajectoire circulaire en essayant de déformer le cas du cercle pour avoir une éclipse et d'avoir quelque chose de cohérent. Donc, si vous avez un cercle, je répète, la vitesse angulaire est constante, le rayon est constant. Alors, si vous déformez ceci, donc, l'air balayé par unité de temps est constante, ce qui va rester vrai pour l'éclipse, mais le rayon va varier, et la vitesse angulaire aussi, pour que l'air balayé par unité de temps soit une constante. Alors, cette deuxième loi est absolument impressionnante, mais c'est rien à côté de la troisième. La troisième, elle affirme quoi ? Elle dit que le rapport du carré de la période orbital de rotation divisé par le cube du demi grand axe de l'éclipse, c'est une constante. Alors là, chapeau, chapeau bas. Comment vous faites avec une série de points pour en déduire quelque chose d'aussi fondamental, et en plus, c'est juste. Et on va voir à quoi ça sert, puisqu'on va utiliser tous ces résultats maintenant pour établir la forme générale de la force de la gravitation universelle. D'accord ?

notes

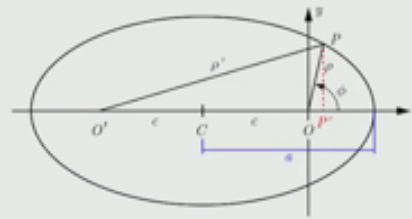
résumé

49m 27s



- **Mouvement de la terre** : ellipse de foyers O et O' . Le soleil est en O et la terre en P .
- **Ellipse** : lieu géométrique des points P dont la somme des distances aux foyers O et O' est fixe.

(9.13)

 $a = \text{demi-grand axe}$

- **Ellipse** : coordonnées polaires

(9.14)

- **Ellipse** : au carré

(9.15)

- **Ellipse** : au carré développée

(9.16)

Donc, on a un système à deux corps, le système planète soleil, supposons que c'est le système Terre-Soleil pour simplifier. D'accord ? La masse de la Terre est de l'ordre de dispuissance 24 kg, la masse du Soleil de l'ordre de dispuissance 30 kg, et donc, il y a un facteur un million entre les deux, ce qui veut dire que la masse de la Terre est tellement petite par rapport à la masse du Soleil, que si on prend le modèle du système à deux corps, la masse réduite est très, très voisine de la masse de la Terre. L'orbite liée au mouvement du Soleil a un rayon qui peut être négliger, et donc on peut considérer raisonnablement que le Soleil est fixe, et qu'on est en train d'écrire le mouvement réduit de la Terre autour du Soleil, et c'est ce qu'on va faire. Dans le plan du système solaire, on va donc prendre, pour décrire ce mouvement, des coordonnées polaires. Donc, le vecteur position de la Terre, centré sur le Soleil, c'est la coordonnée radiale $r\hat{e}$, fois le vecteur unitaire au chapeau. Le vecteur vitesse, il a deux composantes. La Terre, radialement, elle peut se rapprocher s'éloigner. Le rayon peut augmenter, il peut diminuer. Donc, il y a une vitesse radiale qui est repointe au chapeau. Mais il y a aussi une vitesse tangentielle, qui est $r\hat{\phi}$, tangentielle, en coordonnée polaire, qui est $r\hat{\phi}$, fi point, fi chapeau. Alors évidemment, le premier truc qu'on a envie d'essayer, c'est de calculer le moment cinétique, et de l'évaluer par rapport à l'origine qu'on a prise sur le Soleil. Donc, ce moment cinétique, évalué par rapport au Soleil, le moment cinétique du mouvement de la Terre autour du Soleil, c'est le produit vectoriel de la position avec la quantité de mouvement. On va mettre la masse en évidence, c'est donc la masse fois le produit vectoriel de la position avec la

notes

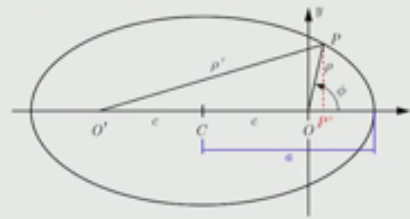
résumé

51m 0s



- **Mouvement de la terre** : ellipse de foyers O et O' . Le soleil est en O et la terre en P .
- **Ellipse** : lieu géométrique des points P dont la somme des distances aux foyers O et O' est fixe.

(9.13)

 $a = \text{demi-grand axe}$

- **Ellipse** : coordonnées polaires

(9.14)

- **Ellipse** : au carré

(9.15)

- **Ellipse** : au carré développée

(9.16)

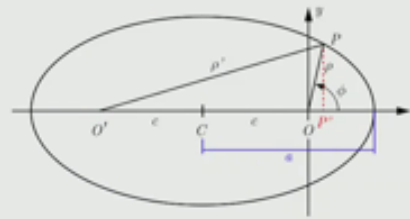
vitesse. On a exprimé ces deux grandeurs cinématiques en composantes. On va maintenant les mettre à profit pour faire le calcul. C'est le genre de calcul qu'on peut tout à fait vous demander en examen. D'accord ? Donc, vous avez la masse fois le vecteur position, qui est de la forme $r\hat{r}$, froid, $\hat{r}$ chapeau, dont on prend le produit vectoriel avec la vitesse, qui s'écrit comme $\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, plus $\dot{r}$ fi point, froid, fi chapeau. Alors, si vous prenez la vitesse, il y a deux composantes. Il y a une composante radiale. Mais la composante radiale, si on prend le produit vectoriel, la position, elle n'a rien apporté. Puisque ces deux composantes, la position et la composante radiale, sont orientées dans le même sens. Donc, on l'a supprimé. Produit vectoriel de $\hat{r}$ chapeau avec $\hat{r}$ chapeau, ça donne zéro. Il nous reste produit vectoriel de $\hat{r}$ chapeau avec $\dot{\theta}\hat{\theta}$ chapeau. $\hat{r}$ chapeau, c'est le premier vecteur unitaire du repère, $\hat{\theta}$ chapeau, c'est le deuxième. Et si on ajoute la troisième dimension, l'axe z , pour des coordonnées cylindriques, le produit vectoriel de $\hat{r}$ chapeau avec $\hat{\theta}$ chapeau nous donne $\hat{z}$ chapeau. Donc, on a notre $\hat{z}$ chapeau. Et on a en facteur, $m, \dot{r}^2$, froid fi point. Tiens, ça nous rappelle quelque chose. Quand on a décrit ensemble, mouvement de rotation d'un poc sur un plan, on a vu qu'on avait une grande règle qui était constante, mais on a vu une masse, fois une coordonnée radiale au carré, multipliée par la dérivée temporelle d'un an. D'accord ? C'est la même idée ici. Bon, alors maintenant, le moment de force du haut force extérieur, évalué par rapport à l'origine, d'accord ? Ou la somme des moments de force, si vous voulez, c'est la dérivée temporelle du moment scientifique évalué par rapport à l'origine. Il y a une seule force dans cette discussion, c'est la force de la

notes

résumé

- **Mouvement de la terre** : ellipse de foyers O et O' . Le soleil est en O et la terre en P .
- **Ellipse** : lieu géométrique des points P dont la somme des distances aux foyers O et O' est fixe.

(9.13)

 $a = \text{demi-grand axe}$

- **Ellipse** : coordonnées polaires

(9.14)

- **Ellipse** : au carré

(9.15)

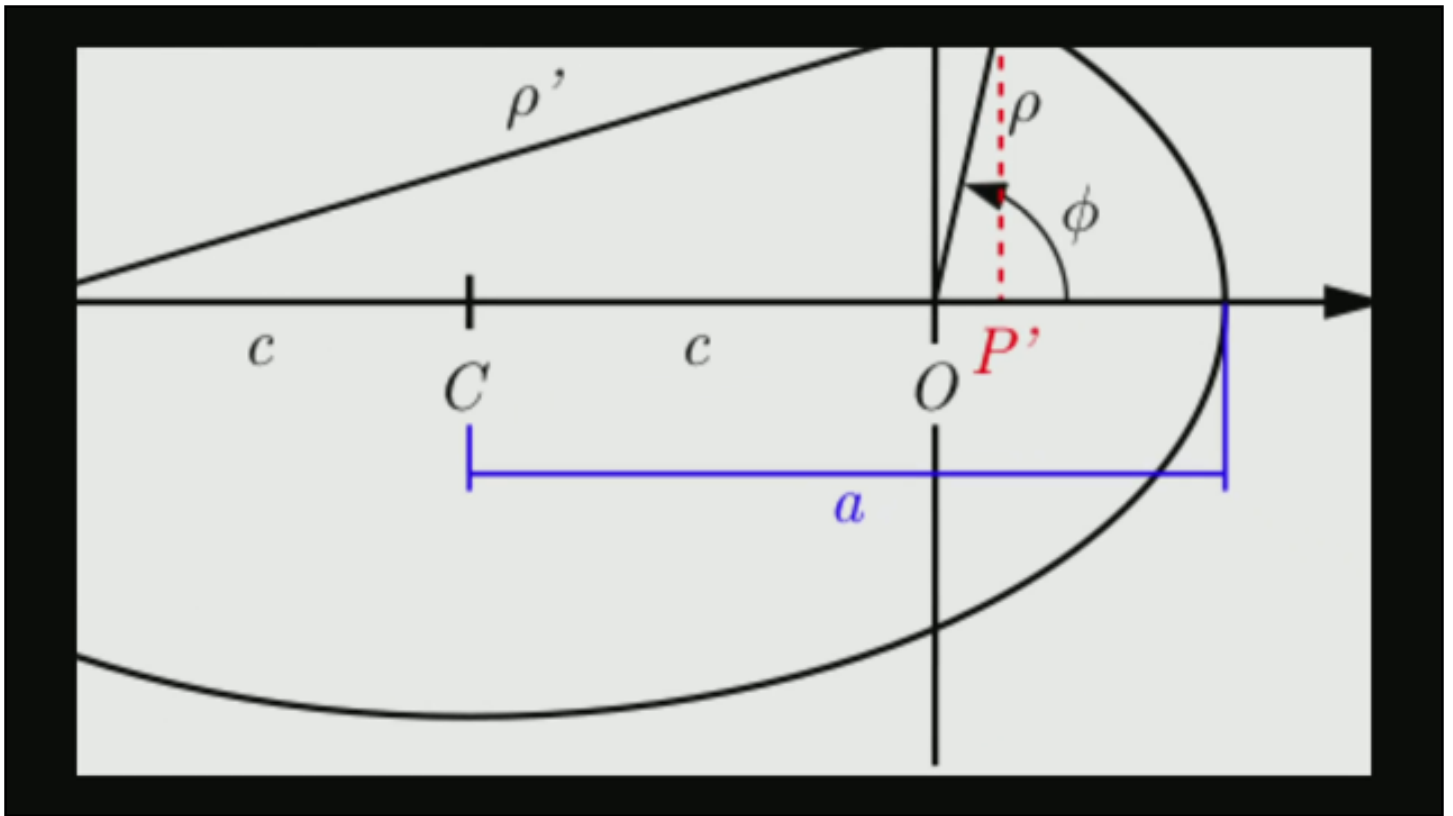
- **Ellipse** : au carré développée

(9.16)

gravitation universelle. C'est pour ça qu'on n'a pas mis la somme des moments. D'accord ? Donc le moment de force, qui est forcément un moment de force gravitationnel, c'est la dérivé temporelle du moment scientifique, qu'on peut donc maintenant calculer. On va avoir M , et on va devoir dériver par rapport au temps, $\dot{r}$ carré fi point, d'accord ? Z -chapo est constant. Donc on va avoir 2 $\dot{r}$ points $\dot{r}$, fi point, puis on aura aussi $\dot{r}$ carré fi point point. Donc on va mettre $\dot{r}$ en évidence. Il va nous rester 2 $\dot{r}$ points fi point, d'accord ? Plus $\dot{r}$ fi point point, le tout, fois Z -chapo. On a envie de dire, je dis bien, on a envie, on a envie de dire que ceci est nul, c'est effectivement nul, mais pour l'instant on n'est pas encore en mesure de le montrer, on pourra le faire un petit peu plus tard et on va le faire, d'accord ? Donc on met ça en suspens pour l'instant, et on va s'intéresser à la première loi de Kepler, d'accord ?

notes

résumé



Que vous avez vu en exercice la toute première semaine, la fameuse ellipse qu'il fallait paramétriser, d'accord ? Donc, prenons l'orbite elliptique, évidemment que j'ai exagéré le trait, l'orbite est quasiment circulaire, mais pour bien voir les choses, on l'a décrit de manière très elliptique, OK ? Vous avez l'orbite elliptique de la planète, de la Terre, autour du soleil qu'on a placé ici, l'un des foyers d'ellipse, la foyer droite qui est l'origine haut, d'accord ? Il y a un foyer symétrique au prime qui est là. Le centre, il est ici. La distance qui sépare chaque foyer du centre, c'est C, le demi grand axe, le ellipse, c'est A, d'accord ? Non, le demi grand axe, c'est A, le demi grand axe, c'est A, donc le grand axe, c'est 2A, OK ? Maintenant, une ellipse, c'est quoi ? C'est le lieu géométrique des points, dont la somme des distances au foyer est une constante. Donc, si vous avez un bout de ficelle qui est là, c'est l'ellipse du jardinier, vous imaginez que vous avez un pieu en bois, vous pouvez le faire tourner sur une ellipse, en gardant la même longueur de la ficelle, d'accord ? Bon, concrètement, ça veut dire que la norme du vecteur OP, à laquelle on ajoute la norme du vecteur au prime P, donc la somme des distances du point P au deux foyers, est une constante. Et c'est justement ce qu'on aimerait exploiter maintenant pour réussir à exprimer la coordonnée radiale $r\theta$, en termes de la coordonnée angulaire ϕ . Bon, la coordonnée radiale, c'est la distance qui sépare le point P de l'origine, d'accord ? Ensuite, imaginons que, initialement, le point P est ici, qu'il se déplace comme ceci, on va repérer l'angle que fait le vecteur OP avec l'axe horizontal, et cet angle, c'est l'angle ϕ . Ok ? Alors, concrètement, si on écrit l'ellipse en coordonnée polaire, on a que $r\theta$

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

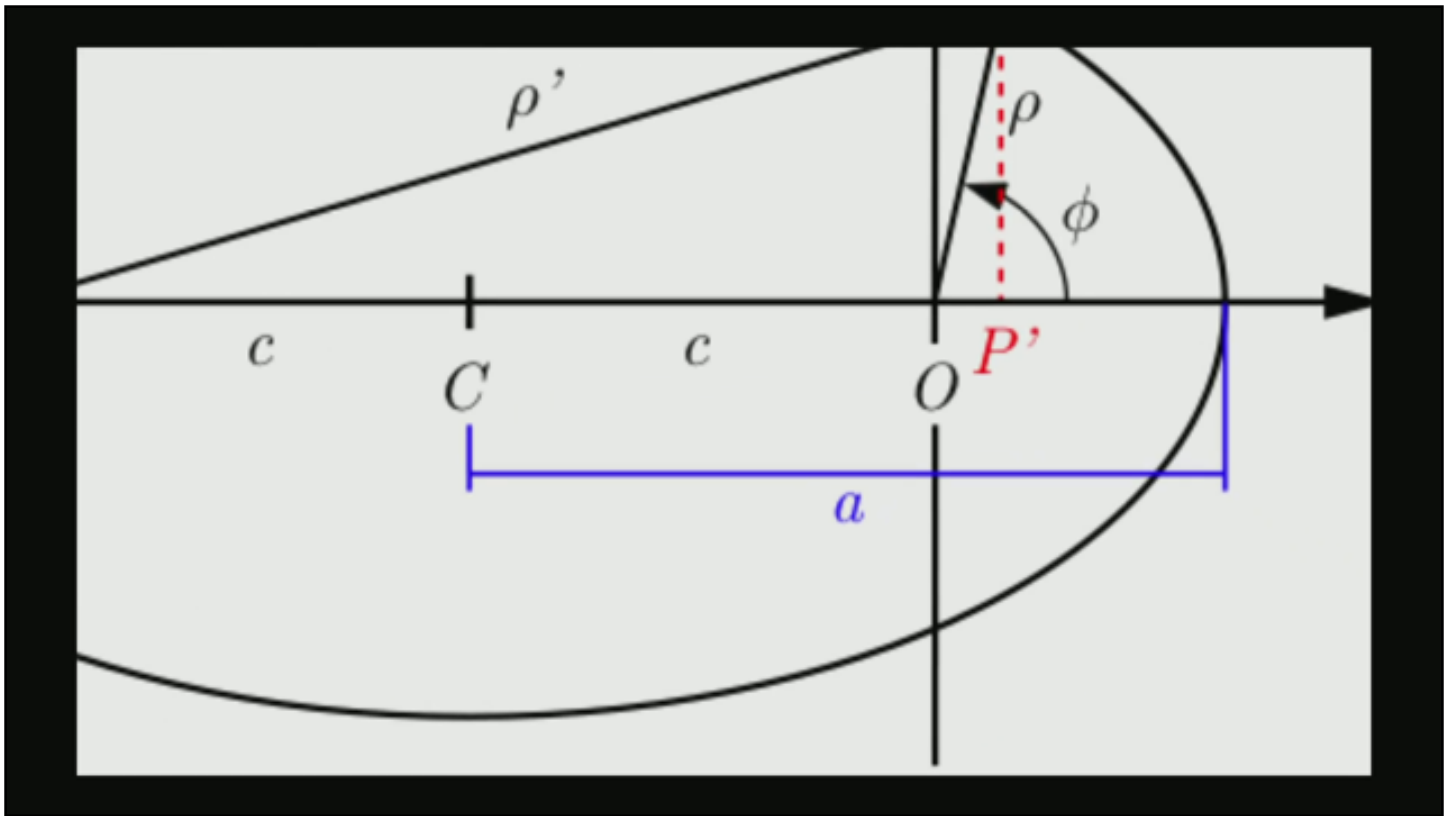
.....

.....

résumé

55m 41s





plus reprime, c'est une constante. Le problème, ça va être d'exprimer ρ prime en termes de ρ et de ϕ , et là, c'est de la géométrie. On va la faire ensemble. Pour faire cette géométrie, on aura besoin d'un point supplémentaire, c'est la projection du point P sur l'axe des X. D'accord ? Ce point, c'est le point P prime. Alors, on va considérer le triangle, OP prime P prime P, qui est un triangle rectangle, dans l'hypothénus, vos ρ primes, l'hypothénus, c'est OP prime P, d'accord ? C'est cette distance reprime. Bon, comme on a calculé l'hypothénus d'un triangle rectangle, grâce à Pythagore, c'est la racine carré du carré de la somme des carrés des cathètes. Donc, il faudra déjà qu'on dispose de P prime P. Ok ? La racine, je vais l'écrire après. Donc, on va prendre le carré de P prime P, qui va être $\rho \sin \phi$. D'accord ? Pourquoi ? Parce que, si on zoom un petit peu, voilà,

notes

résumé

- **Mouvement de la terre** : ellipse de foyers O et O' . Le soleil est en O et la terre en P .
- **Ellipse** : lieu géométrique des points P dont la somme des distances aux foyers O et O' est fixe.

$$\|\overrightarrow{OP}\| + \|\overrightarrow{O'P}\| = c \text{ ste} \quad (9.13)$$

- **Ellipse** : coordonnées polaires

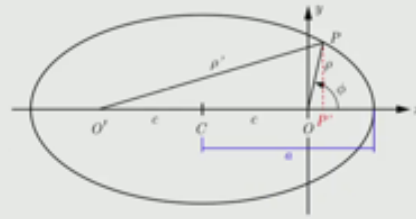
$$\rho + \rho' = \rho + (\rho \sin t)^2 \quad (9.14)$$

- **Ellipse** : au carré

$$(9.15)$$

- **Ellipse** : au carré développée

$$(9.16)$$



a = demi-grand axe

on a ici OP qui vaut $r\theta$. On projette sur le demi petit axe, ou si vous avez une droite qui est parallèle, d'accord ? Et on va donc avoir la cathète qui est opposée à l'angle ϕ qui est ici, qui est $r\theta \sin \phi$. D'accord ?

notes

résumé

58m 46s



- Ellipse : coordonnées

(9.17)

- Coordonnée radiale :

(9.18)

 $a = \text{demi-grand axe}$

- Excentricité :

(9.19)

- Cercle :

- Ellipse :

- Coordonnée radiale : fonction de la coordonnée angulaire

(9.20)

Dr. Sylvain Bréchet

9 Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

14 / 39

Donc, on avait des vaut carré. On doit ajouter à ceci, OP prime P , sa norme, elle va élever au carré. Alors, c'est quoi OP prime P ? Eh bien, ça va être la somme, de OP prime O , OP prime O , c'est de C , et on va ajouter OP prime. On a un triangle rectangle, qui est OP prime O , qui est ici. On avait pris le cathète opposée à l'angle ϕ , qui est PP prime, le cathète adjacent, c'est OP prime et OP prime, c'est $r \cos \phi$. Donc, on a de C plus $r \cos \phi$, qu'on élève au carré. La somme de ces carré des cathètes, du triangle OP prime P prime P , c'est le carré, d'hypothénus, on prend la racine carré, on trouve l'hypothénus, qui se trouve être OP prime.

Maintenant, ceci est une constante, et on doit trouver cette constante. Alors, on va se montrer astucieux. On va placer ici un point P seconde. On prend le point P , on le déplace ici, le long de la trajectoire, pour l'amener là. La longueur de fil n'a pas changé, d'après la définition d'ellipses. La longueur totale de fil, qui est ici, ça va être la distance qui va de OP prime à P seconde, plus la distance qui va de P seconde jusqu'à P . C'est-à-dire que c'est... Je vais le détailler ici. C'est la constante qu'on doit trouver. Elles vont en fait, C plus a , plus a moins c . Donc, vous avez a qui est ici, plus c , c'est plus a , c'est la distance de OP prime à P seconde. Si vous prenez a , qui est à la distance de c , à P seconde, que vous retranchez la distance de c à O , qui est c , vous avez a moins c . Donc c'est plus a , plus a moins c . Laissez-y, se simplifie, il nous reste deux a . C'est donc deux a , et ces deux a ,

notes

résumé

59m 4s

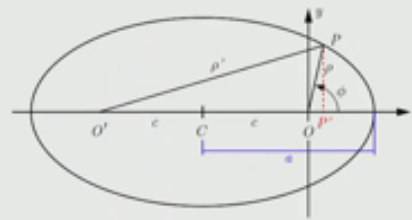


- Ellipse : coordonnées

(9.17)

- Coordonnée radiale :

(9.18)

 $a = \text{demi-grand axe}$

- Excentricité :

(9.19)

- Cercle :

- Ellipse :

- Coordonnée radiale : fonction de la coordonnée angulaire

(9.20)

c'est une constante. C'est tout simplement le grand axe de l'ellipse. C'est magnifique. Alors maintenant, il faut décortiquer tout ça et trouver le diamant qui se cache dans cette équation géométrique. D'accord ? Il faut qu'on élève au carré pour faire disparaître la racine. Donc, elles vont au carré, au carré la racine. On aura donc, ro , sinus, fi , au carré, plus, de c , plus $ro \cos$, fi , au carré, qui va être évidemment égale, à deux a moins ro , élevé au carré. D'accord ? Et ça, il faut le développer. On le développe, et là, on va avoir un ro carré, $\cos$ carré, fi , on va les combiner. On aura un ro carré, qui multiplie le sinus au carré de fi , plus le $\cos$ au carré de fi . On va également se retrouver avec un autre carré, qui est $4c$ carré. On aura un double produit lié au développement du deuxième terme dans le membre de gauche, qui va être un $4c ro$, $\cos$ fi , d'accord ? Et dans le membre de droite, on aura un premier carré, qui est $4a$ carré. Double produit, qui est moins $4a ro$, et un carré, qui est ro carré. Bon, ceci, vaut 1. Donc, ce terme dans le membre de gauche, se simplifie avec le même terme dans le membre de droite. Vous prenez les termes qui restent, qui sont tous multipliés par 4, vous divisez par 4. D'accord ? Et vous les regroupez, et vous tombez sur le résultat suivant.

notes

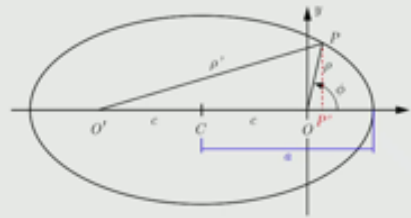
résumé

- Ellipse : coordonnées

$$\rho(a + c \cos f) = a^2 - c^2 \quad (9.17)$$

- Coordonnée radiale :

$$\rho = \frac{a \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)}{1 + \frac{c}{a} \cos f} \quad (9.18)$$



a = demi-grand axe

- Excentricité :

$$e \equiv \frac{c}{a} \quad (9.19)$$

• Cercle : $c = 0$ ainsi $e = 0$

• Ellipse : $0 < c < a$ ainsi $0 < e < 1$

- Coordonnée radiale : fonction de la coordonnée angulaire

(9.20)

Ro qui multiplie, a plus c cos fi, d'accord ? Et est égal à a carré, moins c carré. Bon. Alors, pour des raisons géométriques, on va diviser cette équation par le terme entre parenthèses, qui est ici. Et au passage, au numérateur et au dénominateur, d'accord ? On va diviser par a. Et on va se retrouver avec ro, qui vaut a, qui multiplie, un moins c carré sur a carré, diviser par a plus c sur a, le toutefois le cosinus de fi. Quel est le paramètre qui ressort naturellement de cette description ? C'est un paramètre dont on a déjà parlé. C'est l'excentricité, soit le rapport, de la distance qui sépare le foyer du centre, divisé par le demi grand axe de l'Elysse. D'accord ? Ou, de manière complètement équivalente, la distance entre les foyers divisé par le grand axe. D'accord ? Donc, a, c, c, c, sur a. C'est donc cette distance sur celle-ci, ou alors, cette distance sur celle-là. Ok ? Alors si on a un cercle, qu'est-ce qui se passe ? Les foyers sont confondus, ils correspondent au centre. Donc, la distance c est nulle. Donc, si c est nulle, automatiquement, on a une excentricité qui vaut zéro. Bon. Alors maintenant, pour une ellipse, c'est pas vrai, c est non nulle. Donc, si c est non nulle, il va clairement regarder le dessin être inférieure à a. Il est clair que cette distance est plus petite que celle-là. D'accord ? Et donc, on se retrouve avec une excentricité qui est bornée inférieurement par zéro, donc compris, bornée supérieurement par un, donc compris aussi. Ok ? Et alors maintenant, le tour est joué, puisque on est dans un plan, on a défini une trajectoire,

notes

résumé

62m 34s



Kepler

EPFL

onées

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad (9.17)$$

iale :

$$\left(\frac{c^2}{a^2} \right) \quad (9.18)$$

$$a = \text{demi-grand axe}$$

$$(9.19)$$

$$c = 0 \quad \text{ainsi} \quad e = 0$$

$$0 < c < a \quad \text{ainsi} \quad 0 < e < 1$$

iale : fonction de la coordonnée angulaire

$$\frac{(1-e^2)}{1+e \cos \phi} \quad (9.20)$$

9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

14 / 39

9.2.2 2^e loi de N

- Force de la gravitation à l'origine O .
- Loi du mouvement
- Accélération : $a = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2)$
- Equations du mouvement
 - selon $\hat{\rho}$:
 - selon $\hat{\phi}$:

Dr. Sylvain Bréchet

c'est-à-dire qu'on a lié à la coordonnée angulaire, on a lié rho, à phi. Donc, l'ellipse, en coordonnée polaire, nous donne un rho comme fonction de phi, qui est a qui multiplie un moins e² sur 1 plus e fois le cosinus de phi. D'accord ? Ça valait la peine de faire un petit peu de géométrie, parce que le résultat est absolument superbe. Et vous allez voir, on n'est pas au bout de nos surprises.

notes

résumé

64m 37s

page 50/96 - 9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

- **Moment de force gravitationnelle** : (9.12) et (9.23)

$$M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O = m\rho \left(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \right) \hat{z} = \quad (9.24)$$

- **Moment cinétique** : évalué en O (9.11)

(9.25)

Le moment cinétique L_O du mouvement gravitationnel est constant parce qu'il n'y a pas de moment de forces extérieures par rapport à l'origine O . Ceci est dû au fait que la force gravitationnelle $F_G = -F_G(\rho)\hat{\rho}$ est colinéaire au vecteur position $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho}$.

- **Vitesse angulaire scalaire** : fonction de la coordonnée radiale (9.25)

(9.26)

Alors maintenant, on s'attaque au gros morceau. La deuxième loi Newton, d'accord ? La force d'aggravitation universelle exercée par le soleil sur la Terre, clairement, comme on a un système à deux corps, c'est une forme, une force intérieure au système formé de la Terre et du Soleil. Elle est donc le long de la droite qui l'élit, elle est radiale, qui plus elle est attractive, donc elle est orientée de la Terre vers le Soleil. Dans la direction opposée à Rochapo, on va donc introduire un signe-moins et on aura donc une composante radiale positive, F_G , qui va d'abord d'accorder radiale R_o , d'accord ? On voit ici F_G de R_o est positive, et vous me direz, oui, mais où est Φ dans l'histoire ? Eh bien, on sait que R_o est une fonction de Φ , donc il est clair que la force d'aggravitation va aussi dépendre de Φ . Ok ? Écrivons la loi du mouvement. Ça, pour le coup, c'est très simple. Il y a une seule force qui est exercée sur la Terre, qui est la force d'aggravitation universelle F_G , qui est le produit de la masse de Terre, fois son vector-accélération. Le vector-accélération, on l'écrit encore d'un épolaire, on a une accélération radiale, une accélération centripète, une accélération tangentielle, ainsi qu'une accélération de Coriolis. Elles sont toutes là. D'accord ? En deux dimensions, il n'y en a que quatre. Ok ? Alors, maintenant, on projette notre loi du mouvement en substituant l'accélération ainsi que notre modèle dans la loi du mouvement, et on projette selon les lignes de coordonnées. On commence par lignes de coordonnées radiales, où s'exerce justement la force d'aggravitation. On aura moins F_G d'euros, qui va être égal à la masse, qui multiplie l'accélération radiale plus l'accélération centripète. Et puis, la deuxième équation est très intéressante, puisque si on projette la loi du mouvement, le long de la ligne de coordonnées azimutales qui est

notes

résumé

65m 5s



- **Moment de force gravitationnelle** : (9.12) et (9.23)

$$M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O = m\rho \left(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \right) \hat{z} = \quad (9.24)$$

- **Moment cinétique** : évalué en O (9.11)

(9.25)

Le moment cinétique L_O du mouvement gravitationnel est constant parce qu'il n'y a pas de moment de forces extérieures par rapport à l'origine O . Ceci est dû au fait que la force gravitationnelle $F_G = -F_G(\rho)\hat{\rho}$ est colinéaire au vecteur position $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho}$.

- **Vitesse angulaire scalaire** : fonction de la coordonnée radiale (9.25)

(9.26)

orthogonal à la ligne qui joint le soleil et la terre, la force qui est exercée est nulle. Oui, mais elle est égale au produit de la masse fois nos deux accélérations, l'accélération tangentielle et l'accélération de Coriolis. D'accord ? Si les accélérations ne sont pas nulles, c'est la somme des deux qui est nulle. Ça, il y a une grande différence. D'accord ? Alors, elles seraient nulles, disons, pour un mouvement circulaire, parce que pour un mouvement circulaire au point nul, automatiquement si point point nul, on a donc une vitesse angulaire constante. Mais, dans le cas général, les deux sont non nulles. D'accord ? Est-ce que le terme que vous avez ici vous rappelle quelque chose ? Si vous avez bien suivi, on l'a vu tout à l'heure. On l'a vu dans l'expression de la dérivée temporelle du moment cinétique. En réalité, si on prend la dérivée temporelle du moment cinétique,

notes

résumé

- **Coordonnée radiale :**

$$\rho(\phi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi} \quad (9.20)$$

- **Vitesse angulaire scalaire :**

$$\dot{\phi}(\rho) = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.26)$$

- **Vitesse radiale :** dérivée temporelle de (9.20) avec (9.26)

$$(9.27)$$

- **Accélération radiale :** dérivée temporelle de (9.27) avec (9.26)

$$(9.28)$$

ce qu'on a vu, c'est que le moment de force extérieur évalué par rapport à l'origine, qui est la dérivée temporelle du moment cinétique, à cette forme. Ce qu'on vient donc de montrer, c'est que le produit de la masse, fois l'énergie entre parenthèses ici, doit être égal à zéro. Ce qui veut dire qu'on peut donc conclure que le moment de force extérieur, exercé sur la Terre, évalué par rapport au Soleil, est nul. Donc, le moment cinétique associé au mouvement de la Terre autour du Soleil, doit être une constante. Ce moment cinétique, l'eau, il a une certaine composante scalaire, on va l'appeler L , il est vertical, orthogonal au plan de rotation. Et c'est M , recarré, $\phi.z$ -chapo, c'est donc une constante. z -chapo est constant. Ainsi, la composante verticale du moment cinétique, L , qui est ici M , recarré, $\phi.z$ -chapo, est donc une constante. Et ça, ça vaut de l'or. Ça va nous permettre d'aller plus loin. Pourquoi est-ce que le moment cinétique est constant ? Déjà, pourquoi est-ce que le moment de force est nul, puisque les deux sont liés ? La force, c'est une force centrale, c'est une force radiale. Elle est orientée selon Rochapo. La force est orientée selon Rochapo, le vecteur position aussi. Il est radial. Donc le produit vectoriel du vecteur position avec le vecteur force de la gravitation, ce produit vectoriel est nul, ce qui veut dire que le moment de force est nul. Si le moment de force est nul, eh bien le moment en cinétique est constant, c'est ce qu'on vient de trouver. Donc ce qu'on va exploiter maintenant, c'est le lien qui existe entre R_o et $\phi.z$ -chapo. On va exprimer $\phi.z$ -chapo en termes de R_o . Donc $\phi.z$ -chapo, c'est une fonction de $R_o.z$ -chapo, c'est L sur M , recarré. D'accord ? Qu'est-ce qu'on cherche à faire ? On cherche à remettre en forme

notes

résumé

68m 3s



- Force gravitationnelle :

$$F_G(\rho) = m(\rho\dot{\phi}^2 - \ddot{\rho}) \quad (9.23)$$

- Coordonnée radiale et vitesse angulaire scalaire :

$$\rho(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi} \quad (9.20) \quad \dot{\phi}(\rho) = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.26)$$

- Accélération radiale :

$$\ddot{\rho}(\phi) = \frac{eL^2}{m^2a(1-e^2)\rho^2} \cos\phi \quad (9.28)$$

- Force gravitationnelle : (9.20), (9.26) et (9.28) dans (9.23)

(9.29)

l'équation du mouvement radial. Si vous voulez plutôt l'équation, oui l'équation du mouvement radial. D'accord ? Et donc, il va falloir qu'on exploite la première loi de Kepler qui est ici, ainsi qu'en fait, d'une certaine manière, la deuxième loi de Newton, projetée sur direction azimutale, qui nous donne cette vitesse angulaire constante. Alors, j'aimerais juste... Non, c'est qu'il nous donne ce moment siétique constant. J'aimerais juste m'arrêter ici un instant. Le moment siétique, en fait, c'est le produit vectoriel de R avec P. Donc si vous avez le vecteur position qui est ici, le... Oui, je l'ai écrit comme ça, voilà, le vecteur position, que vous avez ici le vecteur quantité de mouvement, c'est la masse fois la vitesse. D'accord ? Si vous faites le produit vectoriel de R avec V, vous allez avoir une certaine surface, ce que vous voulez, c'est la moitié de la surface, d'accord ? Et donc, en fait, on peut montrer que la dérivée temporelle de l'aire balayée par le rayon vecteur, c'est le rapport du moment siétique divisé par deux fois la masse. Ce qui veut dire que, si le moment siétique est constant, l'aire balayée par une étoile est constante. D'accord ? Donc derrière, la composante azimutale de la 2^e loi Newton se cache en fait la 2^e loi du Kepler. Donc on en a déjà tenu compte, d'accord ? Bon, allons plus loin maintenant. Dérivons par rapport au temps, rho comme fonction de phi. On veut rho. comme fonction de phi. Bon. Alors si on regarde la fraction qui est ici, on voit tout de suite que l'humérateur est constant. La seule chose qui peut varier, c'est l'angle phi, qui varie d'ailleurs, qui est au dénominateur, d'accord ? Donc on va réécrire, on va laisser-t-il volontairement un peu de place, on va réécrire A qui multiplie 1 moins E carré. Et alors si on dérive le dénominateur, donc c'est dénominateur élevé

notes

résumé

70m 6s



- Force gravitationnelle :

$$F_G(\rho) = m(\rho\dot{\phi}^2 - \ddot{\rho}) \quad (9.23)$$

- Coordonnée radiale et vitesse angulaire scalaire :

$$\rho(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi} \quad (9.20) \quad \dot{\phi}(\rho) = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.26)$$

- Accélération radiale :

$$\ddot{\rho}(\phi) = \frac{eL^2}{m^2a(1-e^2)\rho^2} \cos\phi \quad (9.28)$$

- Force gravitationnelle : (9.20), (9.26) et (9.28) dans (9.23)

(9.29)

à la puissance moins 1, en orale dénominateur élevé à la puissance moins 2 avec un signe négatif. On aura donc 1 plus E cos phi élevé au carré. Je garde en retenu le signe négatif. Et maintenant il faut qu'on dérive le dénominateur lui-même. Donc on a dérivé interne, il va nous rester un E. La dérivée du cos sinus, c'est moins le sinus, des signes moins se simplifient, on aura le sinus avec la dérivé interne qui est un phi point, c'est E phi point sinus phi, d'accord ? Bon, alors là, on va pouvoir utiliser le fait que phi point, c'est L sur M au carré, d'accord ? Et on va pouvoir utiliser le fait que ceci correspond en fait à re-carré sur A qui multiplie un moins au carré, d'accord ? Donc voyez que les re-carré vont se simplifier, les 1, oui, les re-carré vont se simplifier, et au final on va pouvoir obtenir le résultat suivant, E qui multiplie L sur MA, fois un moins au carré, le tout, fois le sinus de phi. Ça c'est génial puisque la fraction qui est ici est constante. Donc maintenant si ce qu'on veut c'est de l'accélération radiale, si on veut re-point-point comme fonction de phi, on écrit notre fraction constante, on a E L sur MA qui multiplie un moins au carré, d'accord ? Puis il faut qu'on dérive par rapport au temps le sinus de phi qui va évidemment nous donner le cosinus, fois la dérivée interne qui est un phi point, d'accord ? Oui mais ce phi point c'est L sur M re-carré. Donc ceci prend une forme qui commence à ressembler à ce qu'on cherche. On a un E L carré divisé par un M carré A fois un moins E au carré divisé par au carré, fois le cosinus de phi. On est à bout touchant de ce qu'on veut parce que grâce

notes

résumé

- Force gravitationnelle :

$$F_G(\rho) = m(\rho\dot{\phi}^2 - \ddot{\rho}) \quad (9.23)$$

- Coordonnée radiale et vitesse angulaire scalaire :

$$\rho(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi} \quad (9.20) \quad \dot{\phi}(\rho) = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.26)$$

- Accélération radiale :

$$\ddot{\rho}(\phi) = \frac{eL^2}{m^2a(1-e^2)\rho^2} \cos\phi \quad (9.28)$$

- Force gravitationnelle : (9.20), (9.26) et (9.28) dans (9.23)

(9.29)

à tous ces calculs,

notes

résumé

- Force gravitationnelle :

$$F_G(\rho) = \frac{L^2}{ma(1-e^2)\rho^2} \quad (9.29)$$

- Constante : système terre - soleil

(9.30)

- Force gravitationnelle : (9.30) dans (9.21)

(9.31)

- Force gravitationnelle vectorielle : (9.31) dans (9.21)

(9.32)

La force gravitationnelle $F_G(\rho)$ est inversement proportionnelle au carré de la distance ρ qui sépare la terre du soleil.

on dispose de la force de la gravitation universelle, c'est simplement le résultat de l'équation du mouvement projeté sur une ligne de conet radiale. On a l'expression d'euro, on a phi point, on a re-point-point et maintenant on va tout combiner, d'accord ? Donc la force de la gravitation universelle FG, si on met en évidence des bons termes, et on va le faire ensemble, on met en évidence, évidemment que c'est un choix éclairé, L carré sur M A qui multiplie un moins E au carré, fois au carré, et ce qui va nous rester entre parenthèses, ça va être un A qui multiplie un moins E au carré divisé par au, moins E fois le cosinus de phi. Alors là il faut se rappeler que ceci, c'est en fait un plus E cos phi. Et donc on a entre parenthèses un. Ok ? Donc la force de la gravitation universelle, c'est quoi ? C'est L carré sur M A qui multiplie un moins E carré sur au carré. Ça l'air de rien, mais c'est absolument génial.

notes

résumé

74m 19s



- Intervalle de temps infinitésimal :

(9.33)

- Coordonnée radiale : au carré

(9.34)

- Période orbitale : (9.34) dans (9.33) où $\phi \in [0, 2\pi)$ et $\rho = \rho(\phi)$

(9.35)

- Intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2} =$$

(9.36)

Cette intégrale peut être évaluée avec le calcul symbolique de Mathematica ou en utilisant le changement de variable universel $u = \tan(\phi/2)$

Parce que maintenant, regardez bien. Dans notre fraction, L carré est constant, M est constant, A est constant, et une fois qu'on a choisi le système Terre-Soleil, on a fixé l'électricité E . Donc ces termes là sont constants. Donc pour le système Terre-Soleil, c'est spécifique au système Terre-Soleil, on a une constante, on va l'appeler grand cas, et cette constante, c'est L carré sur $M A$ qui multiplie un moins E au carré, et on peut dire quelque chose de plus sur cette constante. On a une orbite elliptique. Par définition d'une orbite elliptique, on sait que l'excentricité E est bornée inférieurement par 0, bornée supérieurement par 1,1, non compris. Donc forcément, que 1 moins E carré est toujours positif. Donc on a une constante qui est toujours positive. Ok ? Et donc, qu'est-ce qu'on a trouvé ? On a trouvé que la force de la gravitation universelle, l'intensité de la force exercée par le Soleil sur la Terre, est inversement proportionnelle à la distance qui les sépare. C'est K divisé par cette distance élevée au carré. Donc la force de la gravitation universelle, FG qui dépend d'euros, est de la forme moins K sur E carré, voir au chapeau. Il reste évidemment une question, une seule question que vos K . D'accord ? Alors maintenant, on va passer un peu de temps pour trouver la structure de K . On sait que la force de la gravitation universelle, dans le cas général, est inversement proportionnelle au carré de la distance. On doit maintenant tenir compte de quoi. De la troisième loi de Newton, on n'en a pas encore du compte, mais aussi et surtout de la troisième loi de Kepler. Alors vous allez vous demander mais comment est-ce qu'on va réussir à raccrocher à notre train de pensée la troisième loi de Kepler ? On va le faire d'une manière suivante.

notes

résumé

75m 30s



- Période orbitale : (9.36) dans (9.35)

(9.37)

- 3^e loi de Kepler :

(9.38)

- Constante : système terre - soleil

$$K = \frac{L^2}{ma(1 - e^2)} = \text{cste} \quad (9.39)$$

- 3^e loi de Kepler : (9.37) et (9.39) dans (9.38)

(9.39)

- Constante : proportionnelle à la masse de la terre m .

(9.40)

Dans la troisième loi de Kepler, se cache un temps une période. Où est-ce qu'on peut trouver un temps dans nos équations ? Le seul endroit où il y a un temps qui est caché, c'est Φ . En fait Φ . C'est des Φ sur dt . Bon. Et puis on sait aussi que c'est L sur M . On peut donc en tirer que l'intervalle de temps infinitésimal d'été peut se paramétrer comme M^2 sur L , fois des Φ . Ok ? On peut prendre Rho , Lv^2 , Rho^2 donc, cette A^2 qui multiplie $1-E^2$ divisé par $1 + E \cos \Phi$, Lv^2 . La période orbitale du mouvement de la Terre autour du Soleil, on va l'écrire de manière complètement triviale en fait. C'est presque appelé au NASP. C'est évidemment la somme des intervalles de temps infinitésimaux lors de la rotation de la planète, de la Terre autour du Soleil sur son orbite. Et on va évidemment mesurer cette période de zéro à 2π . D'accord ? C'est une tautologie pour l'instant. Seulement voilà. D'été, on peut l'écrire comme ceci. Donc maintenant, on va remplacer D'été par M^2 sur L défini. Donc on aura l'intégrale de M^2 sur L défini. R est une fonction de Φ , L et M sont des constantes. Donc ce qui va varier, c'est l'angle Φ . L'angle Φ varie sur une trajectoire périodique, eh bien de zéro à deux π . D'accord ? Bon, continuons. R^2 , on l'a en-dessus. On va mettre en évidence ces constantes. On aura donc M^2 qui multiplie $1-E^2$ le tout divisé par L pour l'intégrale de zéro à deux π , de quoi ? De défini sur $1-E^2$. Faut le cosinus de Φ élevée au carré. Donc maintenant, pour trouver la période orbitale, on doit résoudre l'intégrale qui est ici. On pourrait s'amuser à prendre le changement de variable universel avec U qui est la tangente de Φ sur 2. D'accord ? Ou alors, si on est

notes

résumé

77m 32s



- Période orbitale : (9.36) dans (9.35)

(9.37)

- 3^e loi de Kepler :

(9.38)

- Constante : système terre - soleil

$$K = \frac{L^2}{ma(1 - e^2)} = \text{cste} \quad (9.30)$$

- 3^e loi de Kepler : (9.37) et (9.30) dans (9.38)

(9.39)

- Constante : proportionnelle à la masse de la terre m .

(9.40)

plus pressé, on peut aussi prendre Mathematica qui nous livre directement la réponse sur un plateau. La solution de cette intégrale, c'est la suivante. C'est 2π divisé par $1 - e^2$ à la puissance $3/2$. D'accord ? Donc on va prendre ce résultat, on le substitue là-dedans. D'accord ?

notes

résumé

- Période orbitale : (9.36) dans (9.35)

$$T = \frac{2\pi m a^2 (1-e^2)^{1/2}}{L} \quad (9.37)$$

- 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte} \quad (9.38)$$

- Constante : système terre - soleil

$$K = \frac{L^2}{ma(1-e^2)} = \text{cte} \quad (9.39)$$

- 3^e loi de Kepler : (9.37) et (9.39) dans (9.38)

(9.39)

- Constante : proportionnelle à la masse de la terre m .

(9.40)

Et alors, ce qu'on trouve comme période au final, c'est la suivante. T , c'est $2\pi Mx^2$ qui multiplie $1-E^2$ à la puissance $1/2$ divisé par elle. Qu'affirme la troisième loi de Kepler ? Le rapport du carré de la période sur le cube du demi grand axe, c'est une constante.

notes

résumé

80m 13s



- Constante : proportionnelle à la masse de la terre

$$K \propto m \quad (9.40)$$

- 3^e loi de Newton : la force gravitationnelle exercée par le soleil sur la terre F_G est égale et opposée à la force exercée par la terre sur le soleil $-F_G$.

- 2^e loi de Newton : la force gravitationnelle $-F_G$ exercée par la terre sur le soleil est proportionnelle à la masse M du soleil.

- Constante : la force gravitationnelle $-F_G$ est proportionnelle à la constante K (9.19). Ainsi, la constante K est proportionnelle à la masse du soleil M .

- Constante : proportionnelle à la masse du soleil

(9.41)

- Constante de la gravitation universelle : G

(9.42)

Maintenant, on n'a qu'à appliquer cette loi puisque on a déjà la période, on l'élève au carré et on divise par A au cube. Si on fait ça, on obtient alors que T^2 sur A au cube, c'est $4\pi^2 \times M^2 \times A$ qui multiplie $1/E^2$ divisé par elle au carré. Et là, on peut se servir de la constante qu'on a déterminée pour le système Terre-Soleil. Je vous la rappelle ici. Elle va apparaître au dénominateur dans notre expression. Et là, on a quelque chose d'assez simple. Il nous reste au final $4\pi^2 M$ divisé par K . Et par la troisième loi de Kepler, on sait que ceci est une constante. K est constant. M est constant. On peut en conclure donc que la constante K est proportionnelle à la masse de la Terre. D'accord ? C'était un peu long, mais on y est arrivé. Alors clairement, on s'en doute bien, K doit aussi être proportionnelle à la masse du Soleil. Comment est-ce qu'on va montrer ça ?

notes

résumé

80m 37s



- Loi de la gravitation universelle :

Deux points matériels massifs sont soumis à des forces d'attraction gravitationnelle égales et opposées F_G et $-F_G$, proportionnelles au produit des masses M et m et inversement proportionnelles au carré de la distance r qui les sépare.



Sir Isaac Newton
1643 – 1727



Modèle mathématique : (9.42) dans (9.32)

(9.44)

- Constante de la gravitation universelle :

(9.43)

Pour le montrer, on aura besoin de la troisième loi de Newton. D'accord ? Si dans notre système Terre-Soleil, le Soleil exerce une force de la gravitation F_G sur la Terre, qui est une force d'action, c'est-à-dire que la Terre va exercer sur le Soleil une force de réaction qui est moins F_G . Et si ensuite, on regarde la dynamique du Soleil, on a moins F_G qui est le produit de la masse du Soleil fois l'accélération du Soleil. D'accord ? Donc la constante K est proportionnelle non seulement à la masse de la Terre, elle est proportionnelle aussi à la masse du Soleil. Donc la constante grand K qu'on a introduite est proportionnelle à la grande M , elle est aussi proportionnelle à la petite M . Ce qui veut dire que cette constante c'est une autre constante qui multiplie la masse du Soleil fois la masse de la Terre. Cette dernière constante qu'on va mettre devant les deux masses, elle se réfère à la force de la gravitation universelle, elle est indépendante des masses des objets qui interviennent, or la force de la gravitation dépend des masses. Donc cette dernière constante, elle ne dépend pas des objets choisis, cette dernière constante, c'est une constante universelle, c'est la constante de la gravitation universelle G . D'accord ? Et donc l'affaire est pliée, on a la formule dans le sac,

notes

résumé

81m 49s



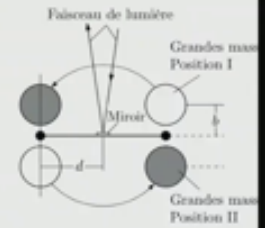
Sir Isaac Newton
1643 – 1727



(9.43)

23 / 39

9.2.4 Expérience - Balance de Cavendish



- La constante de la gravitation universelle G est mesurée avec une pendule de torsion constitué de deux petites masses m oscillant dans un plan horizontal dû à l'attraction de gravitationnelle générée par deux grosses masses M .
- A l'équilibre, le moment de force dû aux forces d'attraction gravitationnelles entre les petites et les grosses masses est égal au moment de force de torsion du fil vertical qui soutient la balance. On en déduit la constante de la gravitation universelle G .

Dr. Sylvain Brichet

9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

puisque maintenant, la force de la gravitation universelle F_G , qui est exercée par exemple par le Soleil de masse grand M sur la Terre de masse petite m , mais de manière générale par un corps de masse grand M sur un corps de masse petite m . D'accord ? Si on regarde donc la force de la gravitation, elle va s'exprimer comme moins G grand M , petit m , moins K , divisé par la carré de la distance qui sépare les objets, fois le vecteur unitaire $\hat{r}$ qui orientait de la masse grand M vers la masse petite m . Et ce vecteur unitaire $\hat{r}$, c'est le rapport du vecteur position de la masse petite m , prenant comme origine la masse grand M , divisé par la norme de ce même vecteur. D'accord ? La constante de la gravitation universelle, c'est pas juste un nombre, elle a des unités. Ces unités dans le système des unités internationales, on peut les trouver en prenant une force qu'on multiplie par une distance au carré, d'accord ? Qu'on va ensuite diviser par une masse au carré. Et si on fait ceci dans le système des unités internationales, on va trouver des mètres au cube divisé par des kilogrammes, multiplié par des secondes au carré et la valeur numérique dans ces unités de la constante de la gravitation universelle, c'est $6,67 \times 10^{-11}$. D'accord ? Il n'y a rien de magique dans ce nombre, c'est juste quelque chose qui ressort des observations physiques. Il y a quatre constantes fondamentales en physique. La constante de la gravitation universelle, la vitesse de propagation de la lumière dans le vide que vous allez, j'espère, établir la semaine prochain dans le cours d'électromagnétisme, il y a aussi la constante de Planck qui intervient en mécanique quantique, on en parlera la dernière semaine, et puis il y a la constante de Boltzmann qui intervient dans la statistique quand on fait

notes

résumé

83m 18s



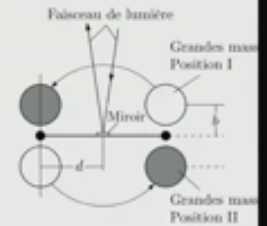
Sir Isaac Newton
1643 – 1727



(9.43)

23 / 39

9.2.4 Expérience - Balance de Cavendish



- La constante de la gravitation universelle G est mesurée à l'aide d'un pendule de torsion constitué de deux petites masses m oscillant dans un plan horizontal dû à l'attraction de gravitationnelle générée par deux grosses masses M .
- A l'équilibre, le moment de force dû aux forces d'attraction gravitationnelles entre les petites et les grosses masses est égal au moment de force de torsion du fil vertical qui soutient le pendule. On en déduit la constante de la gravitation universelle G .

Dr. Sylvain Brichet

9 - Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

de la thermodynamique, par exemple. D'accord ? C'est les seules constantes fondamentales de la physique. Tout est basé dessus. Ok ?

notes

résumé

- Equation du mouvement gravitationnel : astre quelconque

$$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) = -F_G(\rho) = -\frac{K}{\rho^2} \quad \text{où} \quad \dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.23)$$

- Equation du mouvement gravitationnel : remise en forme

(9.45)

- Equation du mouvement gravitationnel : multipliée par $\dot{\rho}$

(9.46)

- Equation : (9.46) multipliée par dt où $d\dot{\rho} = \ddot{\rho} dt$ et $d\rho = \dot{\rho} dt$

(9.47)

- Intégrale : (9.47) de $\rho' \in [\rho_0, \rho]$ et $\dot{\rho}' \in [\dot{\rho}_0, \dot{\rho}]$

(9.48)

Alors, comme la constante de la gravitation universelle est tellement importante, on peut la mesurer expérimentalement. Regardez, grâce à la balance des cavétiches, on voit maintenant que le rayon laser s'est déplacé initialement à droite, il atteint une position d'équilibre à gauche. En mesurant cette déviation, on peut déterminer la constante de la gravitation universelle. Alors, qu'est-ce qu'on fait pour la mesurer pratiquement ? On a ici à l'intérieur de ce dispositif, on a une petite barre horizontale avec deux petites masses. D'accord ? Cette barre est montée sur un fil vertical qui se trouve ici. Vous voyez ceci en perspective. D'accord ? Et puis, on vient déplacer les grandes masses comme je l'ai fait au départ. Et donc, il y a une force de la gravitation universelle qui est exercée par les grandes masses sur les petites masses. Seulement, le fil vertical de torsion il a une certaine élasticité en torsion. Ce qui veut dire qu'au moment de force gravitationnelle évalué par rapport à l'origine, va s'opposer à un moment de force élastique qui a dû aller l'élasticité du fil. D'accord ? Et on va atteindre une position d'équilibre. Et dans cette position d'équilibre, on sera en mesure de déterminer la constante de la gravitation universelle. Vous allez le faire en exercice. Puis pour faire les choses proprement, on va encore introduire, si vous voulez, un moment de force de frottement visqueux puisqu'on va avoir un mouvement harmonique oscillatoire amorti qui va tendre vers la position d'équilibre. Et on peut ainsi, grâce à la déviation, déterminer g . D'accord ? Alors, Cavendish était un personnage bizarre qui vivait en reclus, d'accord, et qui demandait à son serviteur de lui amener des sandwiches à heure fixe et de les amener dans son bureau quand il n'était pas là pour qu'il n'ait pas besoin d'interagir avec le domestique. D'accord ? Mais il a donné son nom à un célèbre institut de recherche

notes

résumé

85m 30s



- Equation du mouvement gravitationnel : astre quelconque

$$m \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right) = -F_G(\rho) = -\frac{K}{\rho^2} \quad \text{où} \quad \dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.23)$$

- Equation du mouvement gravitationnel : remise en forme

$$(9.45)$$

- Equation du mouvement gravitationnel : multipliée par $\dot{\rho}$

$$(9.46)$$

- Equation : (9.46) multipliée par dt où $d\dot{\rho} = \ddot{\rho} dt$ et $d\rho = \dot{\rho} dt$

$$(9.47)$$

- Intégrale : (9.47) de $\rho' \in [\rho_0, \rho]$ et $\dot{\rho}' \in [\dot{\rho}_0, \dot{\rho}]$

$$(9.48)$$

à Cambridge où j'ai moi-même fait ma thèse, d'accord ? Donc le nom de Cavendish, mais ils ont assez cher, et c'est vrai que le fait de déterminer la constante de la gravitation universelle était une prouesse à l'époque. C'était quelque chose de génial. Puisque... Ah oui, j'ai oublié la fin de l'histoire, puisque si vous envoyez un faisceau de lumière, comme ici la tige a été déviée, qui a un miroir qui est fixé dessus, eh bien le faisceau incident va repartir de manière déviée, et cette petite déviation amplifiée sur la distance va permettre de mesurer la constante de la gravitation universelle. Alors à l'époque, Cavendish ne disposait pas de laser. C'est beaucoup plus rudimentaire. Il a réussi à avoir une estimation dans le bon ordre de grandeur de la constante de la gravitation, ce qui était déjà, comme je dis, une prouesse. On a fait mieux depuis, évidemment. Alors, maintenant qu'on a fait ceci,

notes

résumé

- Equation du mouvement gravitationnel : astre quelconque

$$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) = -F_G(\rho) = -\frac{K}{\rho^2} \quad \text{où} \quad \dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.23)$$

- Equation du mouvement gravitationnel : remise en forme

$$m\ddot{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{K}{\rho^2} = 0 \quad (9.45)$$

- Equation du mouvement gravitationnel : multipliée par $\dot{\rho}$

$$m\dot{\rho}\ddot{\rho} - \frac{L^2\dot{\rho}}{m\rho^3} + K\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} = 0 \quad (9.46)$$

- Equation : (9.46) multipliée par dt où $d\dot{\rho} = \ddot{\rho} dt$ et $d\rho = \dot{\rho} dt$

$$m\dot{\rho} d\dot{\rho} - \frac{L^2}{m} \frac{d\rho}{\rho^3} + K \frac{d\rho}{\rho^2} = 0 \quad (9.47)$$

- Intégrale : (9.47) de $\rho' \in [\rho_0, \rho]$ et $\dot{\rho}' \in [\dot{\rho}_0, \dot{\rho}]$

(9.48)

on va prendre la pause, et après la pause, on déterminera les constantes qui sont associées au mouvement gravitationnel.

notes

résumé

88m 25s



- Intégrale : (9.48) différence de termes évalués au temps $t' = 0$ et $t' = t$

(9.49)

- Energie mécanique : constante du mouvement

(9.50)

L'énergie mécanique E est constante car la force gravitationnelle est une force conservative.

- Vitesse angulaire scalaire :

$$\dot{\phi} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (9.26)$$

- Energie mécanique : (9.26) dans (9.50)

(9.51)

Oui, je l'éteins. Mince. Merci beaucoup. Effectivement, oui, je l'éteins à cause de la détonation, parce que s'il y avait eu la détonation avec les fées l'arsonne dans le micro, ça aurait été un peu pénible. Voilà. Donc, intégrons notre équation. On a donc la masse. On intègre. Reprim, on va rajouter... repoint, on va rajouter des primes. Repoint prime, voilà. Du temps initial T égale 0 ou repoint vaux vaux vaux 0, jusqu'au tenté où il vaut rô. On aura moins L^2 sur M , qui est une constante. Et on aura l'intégrale de des rôprimes sur reprime occupé. Convintégrer du temps initial vaux vaux vaux vaux 0, jusqu'en tenté où il vaut rô. Il va nous rester qu'un fois l'intégrale, de des rôprimes sur reprime au carré qu'on intègre du temps initial ou vaux vaux vaux vaux vaux 0, jusqu'au tenté où il vaut rô. Et ceci est égal à 0. Bon. La primitive de rôpoint prime, c'est une demi de rôpoint prime au carré, la primitive de moins 1 sur reprime occupé, donc moins reprime à la puissance, moins 3, va être plus 1 sur 2 rôprimes. Et puis la primitive de 1 sur rôprime au carré, c'est moins 1 sur rôprime. D'accord ? Vous évaluez au borne. Et le résultat de cette intégrale nous donne une demi de M rôpoint carré,

notes

résumé

88m 36s



- **Energie mécanique :**

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{K}{\rho} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K}{\rho} \quad (9.51)$$

- **Energie mécanique :** (7.9) où $V = V_G$

(9.52)

- **Energie potentielle gravitationnelle :** (9.30) et (7.6)

(9.53)

- **Force de la gravitation : norme**

$$F_G = \frac{K}{\rho^2} = \frac{GMm}{\rho^2} \quad (9.31)$$

3

2

moins une demi de M rpoint au carré, plus L carré sur $2M$ rpoint carré, moins L carré sur $2M$ rpoint carré, moins L carré sur $2M$ rpoint 0 au carré, moins K sur rô, plus K sur rpoint 0, qui est égal à 0. D'accord ? Si je prends un terme sur 2, ces termes-là, voyez qu'il dépend de la physique au tenté. Et puis les autres termes, dépendent de la physique au tenté égal 0. Et il y a un signe moins. Ce qui veut dire que la grandeur dont les termes sont soulignés, et non pas avec des vaguettes, si vous prenez les termes impairs, vous avez en fait la grandeur constante qui apparaît ici. Cette grandeur constante, c'est l'énergie mécanique du système. L'énergie mécanique, c'est une demi de M rpoint carré, plus L carré sur $2M$ rôquarré, moins K sur rô, moins K sur rô, et c'est donc une constante. Alors, quelle est la forme explicite ? Oui ? Si la droite, si vous le prenez, vous avez le 0. Alors, si vous prenez l'équation 9, 47, toutes les petites variations infinitesimales des grandeurs sont nulles. Si vous sumez ceci à l'aide d'une intégrale, une somme continue à gauche, ça va rester nulle. Alors, c'est pas une primitive, vous avez une constante d'intégration. C'est à notre cas de figure ici. Donc maintenant, pour voir vraiment quelle est l'énergie potentielle, gravitationnelle, ce qu'il faut faire, c'est réexprimer L en termes de phi-point. Donc on a un L carré sur des M rôcarrés qu'on va réexprimer en termes de phi-point à l'aide de la relation qui est ici. Et si on fait ça, on trouve alors que l'énergie mécanique, c'est une demi de la masse, fois rô-point au carré, plus rô-carré, phi-point carré, d'accord, moins car sur rô. Or, la termine entre parenthèses ici, c'est la somme du carré de la composante radiale de la vitesse et de

notes

résumé

90m 9s



- **Energie mécanique :**

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{K}{\rho} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K}{\rho} \quad (9.51)$$

- **Energie mécanique :** (7.9) où $V = V_G$

(9.52)

- **Energie potentielle gravitationnelle :** (9.30) et (7.6)

(9.53)

- **Force de la gravitation :** norme

$$F_G = \frac{K}{\rho^2} = \frac{GMm}{\rho^2} \quad (9.31)$$

3

2

la composante tangentielle. La vitesse est dans le plan. Donc il y a deux composantes. La somme du carré des composantes, c'est le carré de la vitesse, je vous passerai tout de suite à parole, donc c'est une demi de la masse, fois l'carré de la vitesse, moins car sur rô. Vous avez une question, Martin ? Comment on sait que c'est une large mécénie ? On va y arriver. C'est une constante au cours du temps, il n'y a pas de force dissipative, d'accord, et ce qu'on est en train de voir, c'est que dans cette constante, on a un premier terme qui est l'énergie siétique, d'accord ? Le deuxième terme sera donc interprétable en termes d'énergie, d'énergie potentielle liée à la force conservative, qui est la force de la gravitation universelle, donc l'énergie mécanique doit être conservée, donc forcément que ça doit être l'énergie mécanique. D'accord ? Ça ne pourrait pas être autre chose. Ça pourrait être autre chose s'il y avait des forces non-conservatives. Là, oui, l'énergie n'était pas une constante. Mais comme l'énergie est une constante, si on trouve une grandeur qui est constante, qui contient l'énergie siétique, et que l'autre grandeur est directement liée à la force de la gravitation universelle, elle est donc interprétable, elle est interprétée, c'est ce qu'on va faire en termes d'énergie potentielle gravitationnelle. D'accord ? Donc justement,

notes

résumé

- Moment cinétique : (9.11) évalué en O

(9.54)

- Vecteur accélération : (9.32)

(9.55)

- Produit vectoriel : (9.54) et (9.55)

(9.56)

- Constantes : L_O et K

$$\dot{L}_O = 0$$

(9.25)

et

$$\dot{K} = 0$$

(9.30)

- Dérivée temporelle nulle : (9.25), (9.30) et (9.56)

(9.57)

on a l'énergie mécanique, qu'on peut donc écrire comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle, puisque la force de la gravitation est une force conservative, d'accord ? Et donc, comment est-ce qu'on sait que la force de la gravitation est une force conservative ? On sait que le cas particulier de cette force, qui est le poids, est conservatif. Donc le cas général aussi, d'accord ? Donc, l'énergie potentielle gravitationnelle, ça va être ce moins qu'à suro. C'est moins g grand thème, petit thème, suro, qui est négatif. La force de la gravitation universelle, elle est inversement proportionnelle au carré de la distance. L'énergie potentielle gravitationnelle, elle est inversement proportionnelle à la distance. Donc, elle décroît moins vite que la force, pourquoi ? Parce que pour trouver une énergie potentielle, on calcule le travail d'une force, ce qui veut dire qu'on intègre une force le long du déplacement. C'est la raison d'être de ce dénominateur qui n'est pas le même, qui a une différence de puissance, parce qu'intégrer sur un déplacement va faire intervenir au numérateur un ro , qui va se simplifier avec le ro carré, ce qui est intéressant, c'est que cette énergie potentielle, gravitationnelle, elle est négative. Elle va être négative lorsqu'on a un étalier. Ensuite, ce qu'on peut avoir, c'est une énergie mécanique qui soit négative, soit positive. On va voir que les deux sont possibles et que ça dépend du type de système gravitationnel qu'on est en train de considérer. Il y a une chose qu'on ne va pas faire ensemble, qu'on pourrait faire, pour regarder les notes de cours

notes

résumé

93m 42s



- Dérivée temporelle nulle : (9.57)

$$\frac{d}{dt} (L_O \times v + K \hat{\rho}) = L_O \times a + K \dot{\hat{\rho}} = 0$$

- Vecteur de Laplace-Runge-Lenz :

constante du mouvement

(9.58)

- Vecteur d'excentricité :

constante du mouvement

(9.59)

Le vecteur d'excentricité est orienté selon le demi-grand axe de l'ellipse et sa norme est l'excentricité de l'ellipse : $\|e\| = e$

Pierre-Simon de Laplace

1700 – 1782



Carl Runge

1856 – 1927



ou alors les stades que je vous mettrai à disposition vendredi. On peut montrer qu'il y a une constante qui est liée à la géométrie du mouvement gravitationnel qui est en fait un vecteur dont la norme est l'excentricité de la trajectoire elliptique et qui orientait, selon le demi-grand axe,

notes

résumé

95m 25s



- **Référentiel relatif** : pour étudier les trajectoires (orbites) des astres attirés par le soleil en fonction de leur énergie mécanique E , on se place dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ fixé au centre du soleil qui tourne avec l'astre, tel que le référentiel $\mathcal{R}'$ est toujours radialement orienté vers l'astre. Cela signifie que par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}'$, la vitesse relative $\mathbf{v}'$ de l'astre est purement radiale.
- **Energie cinétique relative** : par rapport au référentiel relatif $\mathcal{R}'$, la vitesse relative de l'astre est la vitesse radiale $\mathbf{v}' = \dot{\rho} \hat{\rho}$. Ainsi, l'énergie cinétique relative dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ s'écrit,

(9.60)

- **Energie mécanique** :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{K}{\rho} \quad (9.50)$$

- **Energie mécanique** : référentiel relatif

(9.61)

cette constante est à une constante près, qui est K , le vecteur de la place longuelle-lens, alors que le grand Wolfgang Pauli a utilisé pour déterminer les orbitals de l'atome d'hydrogène. Il s'est basé sur cette conserve. Si vous voulez, c'est une grandeur qui est très importante dans la pratique si on veut faire des calculs poussés, mais pour comprendre les fondements de la loi de la gravitation, elle n'est pas essentielle. Je vais quand même vous donner simplement la forme générale. Le vecteur d'excentricité, c'est 1 sur K , qui multiplie le produit vectoriel de la sinétique fois la vitesse à laquelle on ajoute le vecteur unitaire, radial et ça. C'est une constante qui, pour un mouvement circulaire, uniforme est nul et qui, évidemment, n'en nul, quand un mouvement n'est pas circulaire-uniforme. Maintenant, on aimerait étudier le type de trajectoire gravitationnelle qu'on va obtenir, quel que soit l'astre concerné qui interagit avec le Soleil en termes de l'énergie mécanique

notes

résumé

95m 47s



- Energie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + V'_G \quad (9.61)$$

- Energie potentielle relative :

- Limites : (9.65)

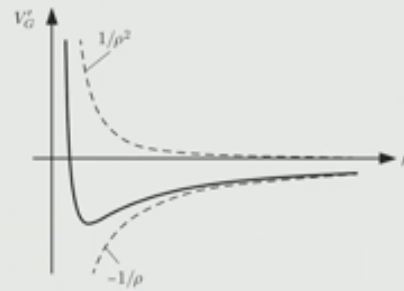
(9.62)

- Minimum : V'_G

(9.63)

- Minimum : $V'_G < 0$

(9.64)



du système astre-soleil. D'accord ? Pour faire cette analyse, on va devoir se placer au centre du Soleil. On regarde l'astre et on est dans un référentiel qui tourne avec l'astre. Donc, si l'astre se déplace, on s'arrange pour tourner avec l'astre de telle manière qu'à chaque instant, l'astre soit en face de nous. Donc, le mouvement relatif de l'astre par rapport à ce référentiel c'est qu'un mouvement radial. Il n'y a plus de mouvement de rotation. Ça, c'est essentiel pour comprendre la suite. D'accord ? Donc, dans ce référentiel R' , l'énergie cinétique relative c'est $1,5$ de la masse fois la vitesse relative de l'astre au carré. Cette vitesse relative et les radials, c'est $1,5$ d'euros au point carré. Bon. Alors maintenant, l'énergie mécanique de départ, on peut l'écrire. Comme cette énergie cinétique relative dans ce référentiel en rotation, plus une énergie potentielle relative et effective, V'_G . Donc, ça sera $1,5$ de M , au point carré plus V'_G . Alors pourquoi est-ce qu'on introduit ce référentiel ? Vous allez comprendre dans quelques instants. L'énergie

notes

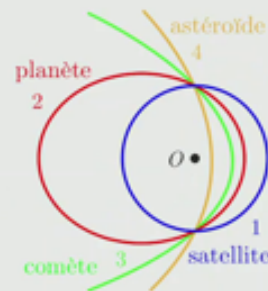
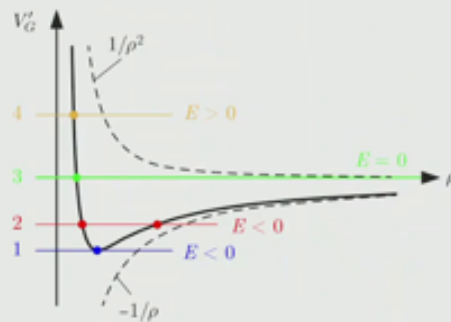
résumé

96m 49s



- Orbites : points d'intersection V'_G et $E = \text{cste}$: extremum de ρ (9.65)

- 1 Circulaire ($e = 0$) :
- 2 Elliptique ($0 < e < 1$) :
- 3 Parabolique ($e = 1$) :
- 4 Hyperbolique ($e > 1$) :



Dr. Sylvain Bréchet

9 Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

32 / 39

potentielle relative le V'_G contient deux termes. Il y a le terme lié au mouvement de rotation de l'astre qui va alors se manifester par un terme de barrière centrifuge qu'on appelle L^2 sur deuxième ρ carré et puis à le terme d'énergie potentielle gravitationnelle traditionnelle qui est le moins casse sur ρ . Donc on a une fonction intéressante de ρ . Bon. On aimerait trouver le minimum de cette fonction. Calculons rapidement le minimum de la fonction qu'on évalue ici donc en ρ égale ρ_0 qui est le minimum. On dérive le potentiel effectif par rapport à ρ . On trouve moins L^2 sur $m \rho_0$ au cume plus qu'à ρ_0 au carré et ceci est égal à 0. On trouve donc ρ_0 qui vaut L^2 sur mk . D'accord ? On peut montrer que si on évalue au minimum V'_G est négatif. Donc si on prend V'_G qu'on l'évalue en ρ_0 contenu de l'expression qu'on vient d'établir ceci vaut alors globalement moins de demi de $m k$ sur L^2 . Donc on fait une étuce de fonction. D'accord ? Ceci est donc négatif. Bon. Pour aller plus loin on doit regarder le comportement limite de notre fonction. Il y a deux termes. Il y a un premier terme qui va dominer lorsque ρ est petit. D'accord ? Le terme 1 sur ρ carré va dominer sur le terme 1 sur ρ lorsque ρ est petit. Ce terme-là c'est la branche hyperbole poignée ici. D'accord ? Écrivons ceci rapidement. La limite de ρ qui tend vers l'infini de V'_G sera plus l'infini. Alors que si on regarde maintenant la limite de ρ qui tend vers l'infini de V'_G on aura le comportement qui est dicté par le deuxième terme qui lui est négatif qu'est la branche hyperbole qu'on retrouve ici. Donc on va tendre négativement vers 0. Maintenant, si on

notes

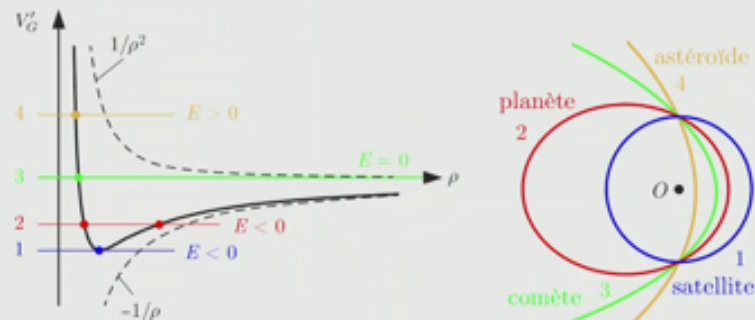
résumé

98m 5s



- Orbites : points d'intersection V'_G et $E = \text{cste}$: extremum de ρ (9.65)

- 1 Circulaire ($e = 0$) :
- 2 Elliptique ($0 < e < 1$) :
- 3 Parabolique ($e = 1$) :
- 4 Hyperbolique ($e > 1$) :



Dr. Sylvain Bréchet

9 Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation

32 / 39

interpelle ces deux solutions on se retrouve avec le graphique que vous voyez ici en noir avec le minimum qui se trouve ici et c'est ce minimum qui est tellement important au point de vue de la physique. Pour comprendre ce qu'on peut tirer de cette analyse

notes

résumé

9.3 Gravitation classique et relativité générale

9.3.1 Prédications de la relativité générale

9.3.2 Cosmologie

pour savoir comment on va se comporter les orbites il faut regarder les extrémomes. Et on va regarder les points pour lesquels la vitesse est nulle. Donc on se déplace de telle manière à voir l'astre en face de nous le mouvement de l'astre est un mouvement radial. La question est y aura-t-il les extrémomes que va-t-il ? Si on regarde les extrémomes donc on regarde les points pour lesquels la vitesse radiale est nulle l'énergie sera égale et la vitesse de l'énergie potentielle effective parce que l'énergie scientifique effective c'est 1 demi de $m \dot{\rho}^2$ qui est égal à 0 si $\dot{\rho}$ est nulle et donc pour ces points-là on aura alors un extrémome de ρ qui soit $\rho_{\min}$ soit $\rho_{\max}$ pour le comprendre il faut prendre le graphe de V_G prime et regarder les points d'intersection avec des valeurs particulières de l'énergie mécanique et constante qui va donc être des droites horizontales Prenons le premier cas où il y a un point d'intersection c'est la droite horizontale que vous voyez ici en bleu On a donc une énergie qui est négative se trouve dans la partie inférieure du graphe On a un seul point d'intersection ce qui veut dire que $\rho_{\min}$ est égal à ρ on a donc une orbite qui est une orbite de rayons constants c'est celle qu'aurait un satellite qui est satellisé autour du soleil sur un rayon constant voilà le premier cas de figure Regardons maintenant le deuxième cas de figure on va prendre une énergie mécanique qui est toujours négative c'est la valeur qu'on voit ici en rouge il y a deux points d'intersection avec le graphe de l'énergie potentielle relative qui correspond à la valeur minimale de la cordée radiale et la valeur maximale donc la E est négative et la cordée radiale est bornée inférieurement par $\rho_{\min}$ supérieurement par $\rho_{\max}$ donc on a un rayon minimal au péril

notes

résumé

100m 32s



9.3 Gravitation classique et relativité générale**9.3.1 Prédications de la relativité générale****9.3.2 Cosmologie**

un rayon maximal à la félix on a donc une trajectoire elliptique c'est celle d'une planète donc si vous prenez l'énergie mécanique de n'importe quel planète dans le mouvement autour du soleil on va se retrouver dans cette région ok dans le premier cas l'excentricité est nulle dans le deuxième cas l'excentricité varie entre 0 et 1 que se passe-t-il si elle vaut 1 elle vaut 1 si il y a un foyer qui est envoyé à l'infini d'accord donc si on prend un foyer qu'on envoie à l'infini eh bien on n'a plus une trajectoire fermée on a une trajectoire ouverte on a un cas parabolique celui qu'on voit ici une comète qui intervient qui interagit avec le système solaire qui est dévié par le soleil qui repart dans ce cas très très particulier l'énergie mécanique est nulle ce qui veut dire que l'énergie cinétique est égale et opposée à l'énergie potentielle il y a une seule valeur minimale, il n'y a pas de valeur maximale ça c'est un cas très particulier il y a un cas plus général où on a une énergie mécanique qui est strictement positive donc si vous voulez l'astre a trop d'énergie il va pas rester attaché au soleil c'est un astéroïde par exemple qui rentre dans le plan du système solaire avec un mouvement rectil uniforme il est ensuite dévié par la présence du soleil et il repart avec un mouvement qui a symptomatiquement rectil uniforme et la trajectoire est une branche hyperbole pour laquelle l'excentricité est supérieure à un et on est également dans la situation où la coordonnée radiale est supérieure ou égale à une valeur minimale donc tout éconique apparaissent dans cette discussion du mouvement gravitationnel le paramètre qui permet de distinguer les cas de figure c'est justement l'excentricité du mouvement et tout se joue sur la valeur de l'énergie mécanique c'est absolument superbe ce graphe permet tout comprendre d'accord

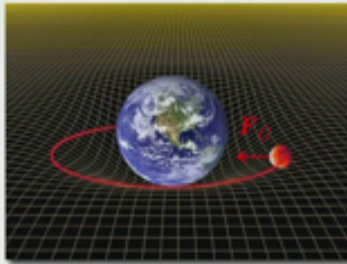
notes**résumé**

9.3 Gravitation classique et relativité générale**9.3.1 Prédications de la relativité générale****9.3.2 Cosmologie**

? alors on a fait pas mal de maths on va s'arrêter avec les maths

notes

résumé

Rotation de la lune
autour de la terre

❶ **Loi de la gravitation universelle** : la force de la gravitation F_G exercée par la terre sur la lune est la cause de l'**orbite elliptique**.

❷ **Théorie de la relativité générale** : la courbure de la structure de l'espace-temps (membrane quadrillée) est la cause de l'**orbite elliptique**.

❶ **Loi de la gravitation universelle** : l'**orbite elliptique** de la lune n'est pas sa trajectoire naturelle (droite) dans un espace-temps plat : la cause du mouvement est la force de la gravitation F_G .

❷ **Théorie de la relativité générale** : l'**orbite elliptique** de la lune est son mouvement naturel dans un espace-temps courbé par la terre : la notion de force est remplacée par celle de courbure de l'espace-temps.

et maintenant on va laisser libre cours à l'intuition physique on va parler du lien qu'il y a entre la gravitation classique et la relativité générale rassurez-vous tout de suite il n'y aura pas de maths compliquée ça va vraiment pouvoir se comprendre avec les doigts

notes

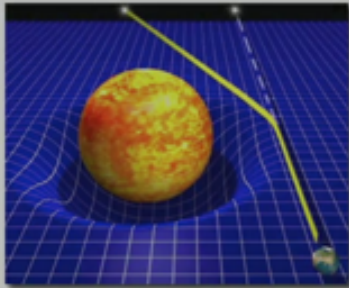
résumé

105m 10s



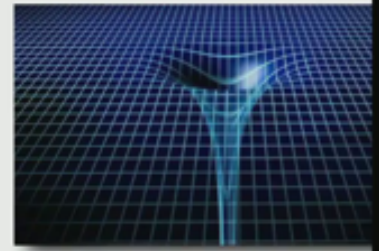
: la
cture
nieux
. Leurs
de leurs

Position Position
réelle apparente



entale de la déviation la lumière par le
générale a été faite durant une éclipse de
ton : Einstein est devenu célèbre du jour

Trous noirs



- **Critère de Schwarzschild** : si r est inférieur au rayon de Schwarzschild, l'espace-temps se rompt et fait un trou noir, puisque rien ni même la lumière ne peut s'en échapper.
- **Trou de vers** : en liant un trou noir à un autre, on obtient un trou de vers qui est un pont dans l'espace-temps pour voyager dans le temps.

d'accord ? revenons sur le problème de la Terre autour du soleil ou de manière complètement analogue le mouvement de la Lune autour de la Terre bon alors si je me place ici sur la caméra 30 je prends la Terre je la place sur la structure de l'espace et du temps la Terre va déformer cette membrane qui est la structure de l'espace et du temps et on va s'intéresser au mouvement de la Lune autour de la Terre si cette membrane parlait rapidement revenons sur la loi de la gravitation universelle elle nous dit quoi cette loi ? elle nous dit que ce qui vient modifier l'état de mouvement naturel de la Lune qui serait un mouvement rectiligne uniforme c'est la présence de la Terre et ceci se fait à l'aide d'une force qui est la force de la gravitation universelle en d'autres termes il n'y a pas de Terre le mouvement de la Lune est un mouvement rectiligne uniforme la présence de la Terre va dévier le mouvement il faut juste dire une petite vitesse il y a du frottement ça ne marche pas bien mais vous avez compris l'idée il va dévier le mouvement de la Lune qui va se mettre à tourner autour de la Terre c'est la force du mouvement gravitationnel particulier de la Lune autour de la Terre c'est la force de la gravitation universelle ce que fait la relativité générale c'est qu'elle fait disparaître les forces comment c'est possible ? parce qu'on doit bien avoir une cause à ce mouvement naturel et bien la cause c'est la courbure même de la structure d'espace et du temps donc si vous voulez, dans un cadre Newtonien le temps et l'espace sont figés ils jouent un rôle statique inintéressant banal en relativité générale l'espace et le temps sont dynamiques ils vont interagir avec la matière donc en courbant la structure de l'espace et du temps

notes

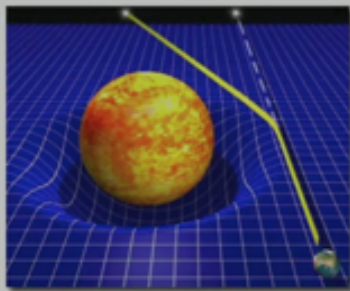
résumé

105m 30s



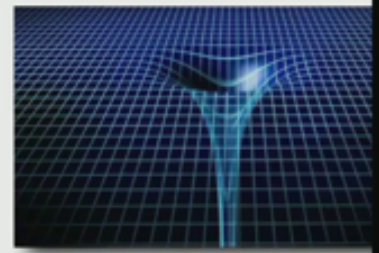
: la
cture
nieux
. Leurs
de leurs

Position
réelle Position
apparente



entale de la déviation la lumière par le
générale a été faite durant une éclipse de
ton : Einstein est devenu célèbre du jour

Trous noirs



- **Critère de Schwarzschild** : si r est inférieur au rayon de Schwarzschild, l'espace-temps se rompt et fait un trou noir, puisque rien ni même la lumière ne peut s'échapper.
- **Trou de vers** : en liant un trou noir à un autre, on obtient un trou de vers qui est un pont pour voyager dans le temps.

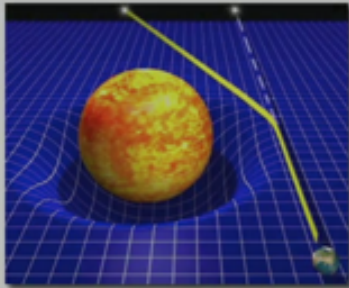
comme une membrane on parvient à décrire ce qui se passe la membrane vous la voyez là vous avez le quadripage qui apparaît en jaune ce quadripage est déformé par un objet massif qui est ici la Terre d'accord ? donc maintenant comme le quadripage est courbé vous prenez la lune vous l'envoyez sur ce quadripage courbé et il y aura un mouvement naturel qui est un mouvement élitique il n'y a plus besoin de force mais le prix à payer c'est de courber la structure de l'espace et du temps donc la lune un mouvement naturel mais dans un espace temps courbé c'est ça qui donne lieu à cette trajectoire élitique ce qui veut dire que et c'est là le génie d'Einstein la deuxième ronde Newton a disparu on est revenu à la première on peut décrire un mouvement gravitationnel en se basant sur le mouvement naturel d'un corps mais pour le faire il faut pouvoir déformer la structure de l'espace et du temps d'accord ? si on pense à l'expérience de Galilé avec deux objets qui tombent en absence de frottement prenons par exemple la balle de bière et la plume d'oie que vous avez pu voir dans la vidéo d'accord ? en absence de frottement les masses sont différentes l'accélération est la même alors maintenant on va faire diminuer la masse dans les deux objets on la fait tendre vers zéro le comportement gravitationnel doit être le même ce qui veut dire que même la lumière dont la masse est nulle va ressentir la courbure de l'espace et du temps et va elle aussi pouvoir courber la structure de l'espace et du temps d'accord ? et ça permet d'expliquer un truc génial qu'on appelle les lentilles gravitationnelles ok ? donc si vous avez un objet comme le soleil par exemple qui est très massif il va courber de manière assez extrême la structure de l'espace et du

notes

résumé

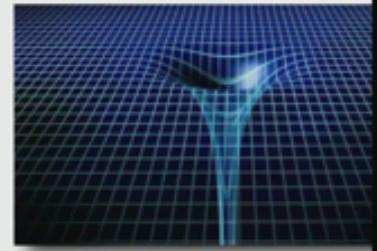
: la
cture
ineux
. Leurs
de leurs

Position Position
réelle apparente



entale de la déviation la lumière par le
érale a été faite durant une éclipse de
ton : Einstein est devenu célèbre du jour

Trous noirs



- **Critère de Schwarzschild** : si r est inférieur au rayon de Schwarzschild, l'espace-temps se rompt et fait un trou noir, puisque rien ni même la lumière ne peut s'en échapper.
- **Trou de vers** : en liant un trou noir à un autre, on obtient un trou de vers qui est un pont entre deux points de l'espace-temps, permettant de voyager dans le temps.

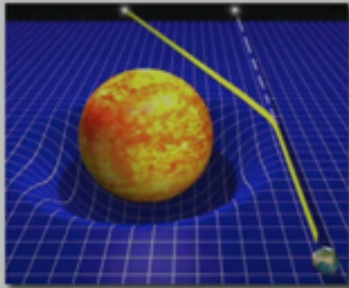
temps alors maintenant vous imaginez que vous avez un croisard lointain un objet très très lumineux qui envoie des rayons lumineux qui se propagent le long d'espace imaginons qu'on peut faire abstraction des autres masses d'accord ? comme l'espace temps s'il n'y a pas d'autre masse et plein le mouvement naturel de la lumière sera un mouvement rectil uniforme d'accord ? c'est bon voilà lorsque la lumière arrive aux abords du soleil la membrane est ici déformée ce qui change la trajectoire le rayon est dévié par la présence du soleil d'accord ? alors maintenant si on fait ça qu'on dessine un objet qui a la forme d'une lentille on se retrouve avec le comportement d'une lentille optique une lentille convergente qui déforme les rayons lumineux on pourrait donc avoir un rayon qui est mis comme ceci et qui arrive là on pourrait donc avoir des images multiples d'un même objet dans l'espace d'accord ? et surtout une déviation du trajet lumineux donc si on est sur Terre nous on imagine que l'étoile est dans la ligne de visée qu'elle se trouve là mais pas du tout elle est déviée ici à gauche alors c'est une image d'artiste la déviation est extrême ici elle est de 30 degrés sur l'image elle est de quelques secondes d'arc une minute d'arc c'est un 60e de degrés une seconde d'arc c'est un 3600e de degrés on est en train de parler de seconde d'arc c'est une toute petite déviation mais elle est observable à large échelle et donc le soleil se comporte comme une antigravitationnelle pour le passage des rayons lumineux et si ça vous intéresse vous allez regarder sur Google vous tapez Hubble Deep Field Gravitational Lensing pour essayer peut-être avec James Webb aujourd'hui d'accord ? et vous allez voir des images multiples d'un même objet astrophysique c'est quelque chose qu'on peut optiquement voir dans des cas très particuliers mais cette déviation

notes

résumé

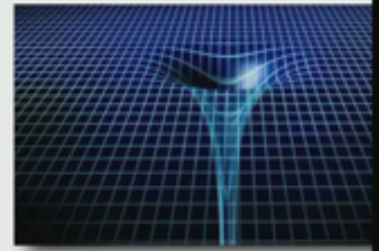
: la
cture
ineux
. Leurs
de leurs

Position Position
réelle apparente



entale de la déviation la lumière par le
érale a été faite durant une éclipse de
ton : Einstein est devenu célèbre du jour

• Trous noirs



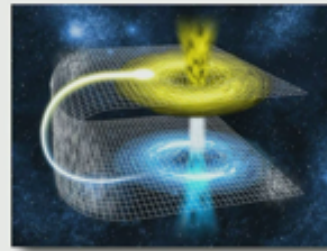
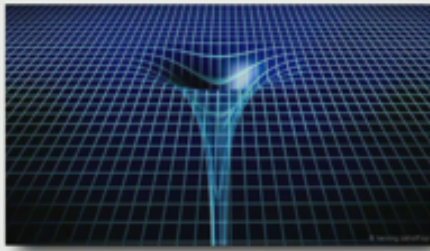
- **Critère de Schwarzschild** : si r est inférieur au rayon de Schwarzschild, l'espace-temps se rompt et fait un trou noir, puisque rien ni même la lumière ne peut s'en échapper.
- **Trou de vers** : en liant un trou noir à un autre, on obtient un trou de vers qui est un pont entre deux points de l'espace-temps, permettant de voyager dans le temps.

des rayons lumineux elle a été prédite par Albert Einstein dans sa théorie de la relativité générale ça a été la première vérification expérimentale de la relativité générale en 1919 et puis après son équipe se sont rendus au Chili où il y a eu une éclipse solaire et ils ont réussi à mesurer la déviation des rayons lumineux aux abords du soleil et cette déviation correspondait à des erreurs de mesure près exactement à la valeur prédite par Einstein, Einstein est devenu célèbre du jour au lendemain

notes

résumé

● Trous noirs



- **Critère de Schwarzschild** : si une masse M se trouve dans un rayon R inférieur au rayon de Schwarzschild $R_s = 2GM/c^2$ alors la structure de l'espace-temps se rompt et fait apparaître une singularité, appelée trou noir, puisque rien ni même la lumière ne peut s'en échapper.
- **Trou de vers** : en liant un trou noir à un trou blanc (son opposé), on obtient un trou de vers qui est un raccourci qui permet théoriquement de voyager dans le temps.

ça n'a pas été la seule démonstration de sa théorie, il y en a beaucoup d'autres qui ont suivi quand on parle de relativité générale il y a un terme qui vient à l'esprit tout le monde c'est le concept du trou noir j'aimerais vous en parler un tout petit peu et puis surtout je vais me raconter une anecdote sur les trous noirs lorsque je faisais ma thèse il y a quelques années ma propre mère qui était à l'époque enseignante au secondaire, on lui a demandé de faire un remplacement dans une école primaire voire même ce qu'on appelait à l'époque une école enfantine avec des enfants de 4 à 5 ans et puis il m'a dit je dois leur parler de science bon et comme j'étais en vacances de retour chez moi j'ai dit ma mère écoute si tu veux moi je veux bien leur parler d'astrophysique et de cosmologie elle me regarde et elle me fait c'était conscient ? c'est les enfants de 4 à 5 ans, ils vont rien comprendre j'ai dit non on peut leur expliquer certains concepts et ils vont comprendre alors comment vous expliquez le concept

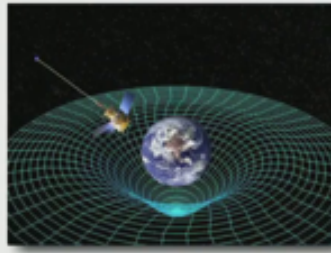
notes

résumé

112m 5s



● Dilatation du temps



- **Courbure de l'espace-temps** : le temps ne s'écoule pas de la même manière sur l'orbite géostationnaire que sur la terre. Il s'écoule plus lentement à la surface de la terre.
- **GPS** : l'erreur due à la dilatation du temps est d'environ 10 m.
- **Ecoulement du temps** : la différence d'écoulement du temps entre le bord de la mer et le sommet de l'Everest est de 1.5 ms/année.

d'un trou noir, un enfant c'est très simple vous dites que vous avez une membrane d'accord ? et que si vous placez un objet sur la membrane par exemple cette balle de ping pong, elle va très légèrement déformer la membrane mais évidemment, si on prend un objet plus lourd comme cette balle un peu plus massive si je la place la déformation elle est nettement plus importante alors on peut continuer à placer les objets de plus en plus lourds, la déformation va être de plus en plus grande seulement la membrane elle a une certaine élasticité, on ne parle pas de l'élasticité la membrane, au bout d'un moment, si l'objet est très lourd qu'est-ce qui se passe ? alors un enfant un peu plus perspicace qu'un autre, répond et ça a effectivement le cas, elle se casse oui, elle se casse, donc qu'est-ce qui apparaît ? il y a un trou dans la membrane très bien, il y a un trou mathématiquement, il y a une singularité ça non plus on dit pas un enfant, mais le concept est là il y a un trou, ok ? alors maintenant, vous prenez un grain de lumière appelez un photon, parlez pas de photon un enfant mais vous prenez la lumière, c'est comme une petite bille vous envoyez la petite bille elle tombe dans le trou, comme il y a un trou elle en ressort, jamais, c'est quoi la couleur du trou l'enfant vous regarde il vous dit, il est noir, bah voilà, c'est ça un trou noir, d'accord ? si vous voulez, ce concept est tellement clair et joli qu'on peut l'expliquer un enfant, c'est ça une vraie théorie aboutie d'accord, la relativité en est un excellent exemple donc vous avez une singularité dans la structure de l'espace et du temps qui fait qu'effectivement, la lumière rend dans un trou noir, n'en ressort jamais presque en termes classiques, oui,

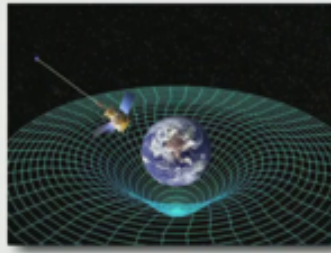
notes

résumé

113m 1s



● Dilatation du temps



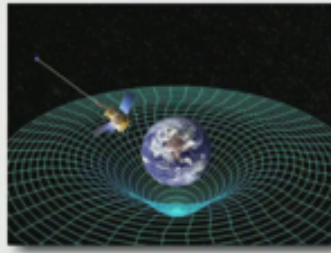
- **Courbure de l'espace-temps** : le temps ne s'écoule pas de la même manière sur l'orbite géostationnaire que sur la terre. Il s'écoule plus lentement à la surface de la terre.
- **GPS** : l'erreur due à la dilatation du temps est d'environ 10 m.
- **Ecoulement du temps** : la différence d'écoulement du temps entre le bord de la mer et le sommet de l'Everest est de 1.5 ms/année.

en termes quantiques les trous noirs peuvent s'évaporer, mais ça c'est plus compliqué, c'est d'ailleurs une prédiction qui a été faite par Stephen Hawking qui n'a jamais pu être démontré expérimentalement sinon il aurait instantanément une prix nouvelle, d'accord ? il l'a malheureusement pas eu, de son vivant moi pis ils sont jamais destinés à d'être disponibles, donc il l'aura pas bref, commence à voir si vous avez vraiment un trou noir eh bien il faut que l'objet soit suffisant si un critère qui permet de déterminer la réponse est oui il faut faire appel à ce qu'on appelle le rayon de Schwarzschild Schwarzschild a montré que si vous avez un objet sphérique pour simplifier dont la masse est-elle que elle est supérieure à la masse que vous auriez pour un rayon donné donc vous prenez le rayon de Schwarzschild qui est $2GM$ sur ces carrés donc si maintenant dans ce volume vous avez une sphère dont le rayon serait de Schwarzschild mais la masse est supérieure à celle donnée par la théorie de Schwarzschild vous avez automatiquement affaire un trou noir alors comment il est construit ce rayon il fait intervenir la constante de la gravitation universel pas de surprise, la masse de l'objet évidemment et comme on sait en relativité il y a la vitesse de l'almire dans le vide ces carrés qui apparaissent au dénominateur donc ceci a été utilisé pour démontrer qu'effectivement il y a un trou noir pas très loin de chez nous quand je dis pas très loin de chez nous c'est quand même pas à la porte à côté parle de à peu près 50 000 années-lumière au centre de notre galaxie il y a effectivement un trou noir comment est-ce qu'il a été mis en évidence en regardant le mouvement des étoiles qui sont tout proches du trou noir si vous appliquez tout simplement la 2e la Newton que vous prenez la

notes

résumé

● Dilatation du temps



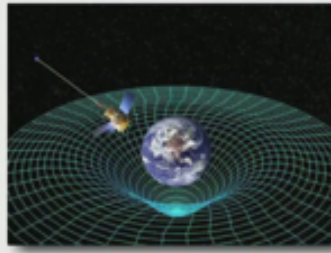
- **Courbure de l'espace-temps** : le temps ne s'écoule pas de la même manière sur l'orbite géostationnaire que sur la terre. Il s'écoule plus lentement à la surface de la terre.
- **GPS** : l'erreur due à la dilatation du temps est d'environ 10 m.
- **Ecoulement du temps** : la différence d'écoulement du temps entre le bord de la mer et le sommet de l'Everest est de 1.5 ms/année.

force de gravitation universel vous allez pouvoir en connaissant la vitesse de l'objet et le rayon déterminer la masse et dedans d'accord et c'est ce qui a été fait les vitesses radiales ont été identifiées par effet Doppler et ça a permis ensuite de déterminer la masse et dedans et effectivement il y a bien un trou noir près de la source Sagittarius A qui est proche du centre de notre galaxie c'est pas demain la veille que ce trou noir va nous avaler d'accord il faut encore attendre longtemps on sera plus là depuis très longtemps parce que ceci se passera il n'y a aucun risque à avoir il n'y a aucun danger avec les trous noirs les trous noirs qui se forment dans des dimensions supplémentaires avec des expériences au CERN c'est de la pop physique ça n'a rien de scientifique d'accord ? alors vous avez un trou noir qui avale tout donc la seule chose qu'on connaît sur un trou noir c'est sa charge électrique c'est sa masse c'est son moment magnétique tout le reste est perdu d'accord ? et qui est qu'il est qu'il a finalement gagné je vous raconterai en privé l'enjeu du pari parce qu'il est pas politiquement correct mais, quoique il en soit je crois que Stephen Hawking a honoré le pari bien si vous prenez un trou noir vous pouvez spéculer qu'il existe l'opposé d'un trou noir qui est un trou blanc donc si le trou noir avale toute la matière le trou blanc la rejette je sais c'est trou blanc si vous connectez un trou blanc un trou noir vous obtenez ce qu'on appelle un pont d'Einstein-Rosen aussi appelé un trou de ver qui permettrait donc d'avoir un raccourci à travers la structure de l'espace et du temps on pourrait imaginer revenir en arrière avant le même jour de notre naissance ou de manière plus pragmatique juste avant un tirage de

notes

résumé

● Dilatation du temps



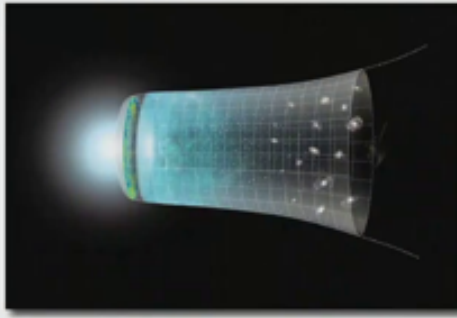
- **Courbure de l'espace-temps** : le temps ne s'écoule pas de la même manière sur l'orbite géostationnaire que sur la terre. Il s'écoule plus lentement à la surface de la terre.
- **GPS** : l'erreur due à la dilatation du temps est d'environ 10 m.
- **Ecoulement du temps** : la différence d'écoulement du temps entre le bord de la mer et le sommet de l'Everest est de 1.5 ms/année.

ronvillon d'accord ? malheureusement c'est pas possible je vais vous dire pourquoi il y a deux raisons à cela la première c'est que le diamètre le plus resserré à l'intérieur d'un trou de verre est tout petit mais quand je dis tout petit c'est tout petit c'est de l'ordre de la longueur de planques 10 puissance moins 34 mètres bon c'est quoi concrètement 10 puissance moins 34 mètres bon, prenons un exemple 10 puissance moins 10 mètres c'est la taille, qu'on se le mode au dos la taille d'un atome d'hydrogène 10 puissance moins 15 mètres, le fermis c'est la taille d'un électron donc si vous pensez la distance qui nous sépare en termes d'échelle de grandeur d'un électron vous la doublez vous arrivez à 10 puissance moins 30 on vous y est de pas encore, il y a encore un facteur $10\ 000$ pour arriver à 10 puissance moins 34 c'est vraiment tout tout tout petit, le tamis est tellement fin que vous ne passerez jamais rien ne passera à travers ce tamis mais de toute façon vous ne parviendrez pas vivant à l'intérieur d'un trou noir la raison à cela est la suivante la différence de gravité qui aurait entre votre tête et vos pieds suivant que vous êtes courageux, la tête en avant un peu plus prudent, les pieds en avant vous écartellerait vous seriez écartolé avant même de parvenir vivant à l'horizon du trou noir donc pas de soucis de ce côté-là et bon, je mentionne ça parce que la littérature de sans fiction a fait couler beaucoup d'encre avec beaucoup de scénarios très intéressants mais très peu réalistes évidemment d'accord ?

notes

résumé

- **Cosmologie** : évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



- $t < 10^{-43}$ s : **Big Bang** (singularité initiale)
- $t \sim 10^{-43} - 10^{-36}$ s : **Univers quantique** (fluctuations)
- $t \sim 10^{-36} - 10^{-32}$ s : **Inflation cosmique** (facteur 10^{80})
- $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**

il y a une autre prédiction qui a été faite qui accompagne la relativité générale et qui a des effets pratiques c'est la dilatation du temps vous prenez la structure de la membrane proche de la masse elle se déforme elle se dilate cette structure le temps s'allonge et donc si vous éloignez de la masse le temps passe plus vite qu'il passe proche de la masse oui, le temps s'écoule sur l'orbite géostationnaire à 30 000 km de la Terre plus rapidement qu'à la surface de la Terre ça veut dire quoi ? ça veut dire que c'est dur et donc on doit tenir compte si vous pensez au système GPS avec des satellites qui sont en orbite géostationnaire pour que le mouvement soit le même en termes de vitesse angulaire que celui de la Terre pour qu'il reste globalement au dessus d'un point de nez ce système de satellites envoie des informations à l'aide d'ondes électromagnétiques pour déterminer par triangulation la position d'un objet à la surface de la Terre maintenant si vous ne tenez pas compte de la dilatation du temps entre l'orbite géostationnaire et la Terre votre système GPS a une imprécision de l'ordre de 10 mètres d'accord ? alors imaginez que vous êtes au sud de l'Europe dans un pays comme dans un autre que vous vous déplacer dans un pays avec des petits villages des petits giratoires à tout bout de champs des ruelles qui vont dans tous les sens si votre GPS il est précis à 10 mètres près vous le jetez à la poubelle et vous oubliez que vous êtes obligé pour faire fonctionner un GPS d'utiliser la correction relativiste de dilatation du temps pas pour lancer un satellite dans l'espace mais pour utiliser le GPS dans votre voiture c'est nécessaire cette différence d'écoulement du temps elle peut se mesurer, elle a d'ailleurs été mesurée si vous passez une année au

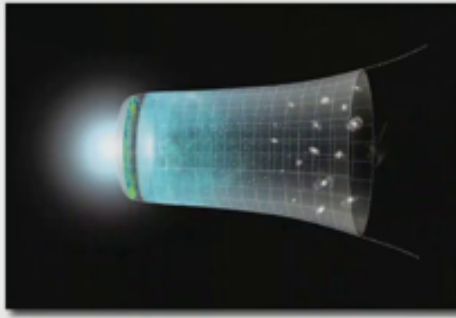
notes

résumé

119m 36s



- **Cosmologie** : évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



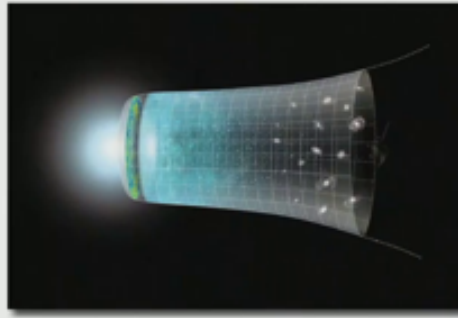
- $t < 10^{-43}$ s : **Big Bang** (singularité initiale)
- $t \sim 10^{-43} - 10^{-36}$ s : **Univers quantique** (fluctuations)
- $t \sim 10^{-36} - 10^{-32}$ s : **Inflation cosmique** (facteur 10^{80})
- $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**

sommet de l'Evereste et puis que vous comparez votre montre à une personne qui a passé une année au bord d'amère la différence c'est 1 millisecondes d'accord ? la leçon à tirer de cette histoire c'est que lorsque vous choisirez votre propre chaîne destination de vacances privilégiées et vacances balnéaires aux vacances en montagne vous allez vivre plus longtemps c'est pas énorme vous m'avez compris

notes

résumé

- **Cosmologie** : évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



- $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**
- $t \sim 400$ millions d'années : **Première étoile**
- $t \sim 7$ milliards d'années : **Expansion accélérée**
- $t \sim 13.7$ milliards d'années : **Création de l'EPFL**

terminons maintenant avec une brève histoire du temps une brève histoire du temps qui va faire appel à la bouteille des viens si on prend l'évolution de notre univers on a ici l'axe du temps d'accord ? et vous avez des plans que vous voyez qui sont orthogonaux au temps qui représentent l'univers à différentes époques le commencement il est là tout à gauche comment on le sait ? si on regarde les galaxies qui nous entourent elles s'éloignent de nous elles s'éloignent d'ailleurs de plus en plus rapidement de nous bon si on remonte du temps dans le temps elle se rapproche le plus en plus les unes des autres elles ne finissent pas disparaître on va voir que des étoiles les étoiles elles-mêmes vont finir par disparaître on va voir que de la matière une matière qui devient de plus en plus dense la lumière va être complètement mêlée en aura un placement de plus en plus chaud et on va tendre vers un point où la matière est infiniment dense qui est infiniment chaud et ce point marque le début de l'existence de notre univers c'est le célèbre Big Bang le mot Big Bang d'ailleurs par son détracteur le plus farouche qui était Sir Fred Hoyle de Cambridge qui détestait ce modèle et pour s'en moquer lors d'une conférence il a dit, well, you know, that's just an explosion that's a big bang tout le monde parle du modèle de Big Bang aujourd'hui ok ? bref donc si vous voulez cette singularité après, bon disons si on prend la singularité mathématique du Big Bang durant l'intervalle de temps qui va de $t \sim 0$ à 10^{-43} secondes, vous allez me dire c'est très petit mais quand même, le temps de planque on peut absolument rien dire sur l'univers il sort de la singularité de 10^{-43} secondes à 10^{-36} secondes

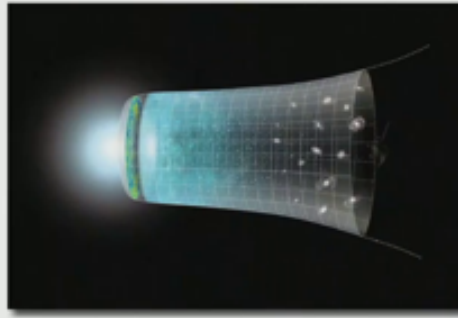
notes

résumé

121m 51s



- **Cosmologie** : évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.

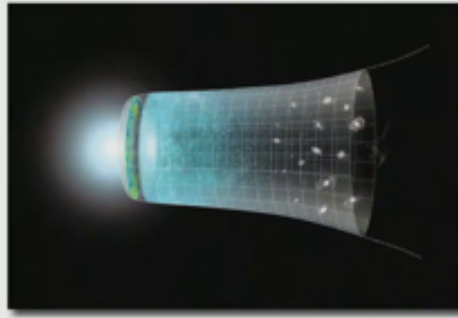


- $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**
- $t \sim 400$ millions d'années : **Première étoile**
- $t \sim 7$ milliards d'années : **Expansion accélérée**
- $t \sim 13.7$ milliards d'années : **Création de l'EPFL**

notes

résumé

- **Cosmologie** : évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



- $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**
- $t \sim 400$ millions d'années : **Première étoile**
- $t \sim 7$ milliards d'années : **Expansion accélérée**
- $t \sim 13.7$ milliards d'années : **Création de l'EPFL**

lieu d'accord ? continuons l'univers donc n'a cessé de grandir il s'est refroidi gentiment d'accord ? par collapse gravitationnel il y a des endroits où il y avait plus de masse d'autres endroits il y en avait moins la masse attire la masse les grandes structures sont formées d'accord ? les étoiles avec etc. les étoiles ont permis de génération après génération de si vous voulez de cuir pour dire des choses comme ça des atomes de plus en plus lourds et notre soleil est une étoile de troisième génération d'accord ? tout ceci prend évidemment du temps la première étoile apparaît après 400 millions d'années d'accord ? notre univers continue son expansion et il y a une composante qui prend le relais qu'on appelle l'énergie sombre faute de mieux qui domine après environ 7 milliards d'années qui domine notre univers et donc qui conduit à son expansion à accélérer ce qui paraît bizarre puisque la gravitation devait freiner l'expansion ça a été une surprise en 1928 on a constaté expérimentalement ça a donné lieu à un prix Nobel en 2011 et il y a évidemment un événement un événement majeur qui a eu lieu dans l'histoire de l'univers qui est la création de notre école d'accord ? environ 13,7 milliards d'années après le big bang j'aimerais terminer en disant c'était quoi le lien avec la bouteille des viens ? c'est que si vous les modélisez ceci mathématiquement vous allez considérer que vous avez un fluide dont les atomes ou les molécules sont eux-mêmes des amas de galaxies dans lequel la viscosité est nulle un superfluide d'accord ? et grâce à ce fluide vous allez pouvoir avec les équations de base d'Einstein et de Friedmann de la relativité générale vous allez pouvoir décrire l'expansion d'univers et en explorer les secrets sur ça je vous souhaite un bon appétit mais j'aimerais terminer avec une question qui m'a été posée pendant la

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

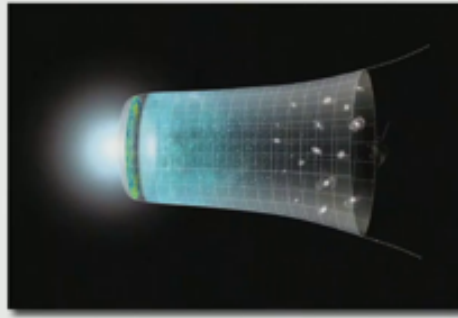
.....

.....

.....

.....

- **Cosmologie** : évolution et histoire de l'univers dans son ensemble obtenue en appliquant la relativité générale à l'échelle de l'univers.



- $t \sim 380'000$ années : **Rayonnement cosmologique**
- $t \sim 400$ millions d'années : **Première étoile**
- $t \sim 7$ milliards d'années : **Expansion accélérée**
- $t \sim 13.7$ milliards d'années : **Création de l'EPFL**

pause précédente sur le besoin d'introduire ce vecteur moment cinétique et pourquoi il a la structure qu'il a pourquoi est-ce qu'il est orthogonal au plan de rotation ? si vous vous rappelez la structure du vecteur vitesse angulaire on l'a introduit en utilisant les formules de poisson on avait une application linéaire qui envoyait les vecteurs unitaires d'un repère sur leur dérivé temporel et on a vu qu'on pouvait écrire les formules de poisson qui permettait de définir un vecteur qui permet d'encoder cette information ce vecteur se trouve sur l'axe de rotation d'après la règle de la main droite il contient la même information mais la vraie information physique et en réalité contenue dans le plan de rotation c'est l'élément de plan orienté dû à la vecteur position et au vecteur quantité de mouvement d'accord ? pour décrire ceci on doit se placer dans la structure d'une algèbre c'est ce qu'on devrait faire c'est ce qu'on ne fait pas d'accord ? et si ça vous intéresse pour ceux qui s'intéressent les autres vous pouvez très volontiers aller tout de suite manger d'accord ? et bien je vais rapidement vous donner les idées de base de cette algèbre pour vous permettre de comprendre ce que sont les nombres imaginaires ce que sont les quaternions d'accord ? et comment on peut interpréter

notes

résumé